FAIRE LES 2kπ — PREMIÈRE SPÉCIALITÉ

APPROFONDISSEMENT CALCULATOIRE

Dérivation — Première spécialité mathématiques

Choisir une écriture, justifier les conditions, contrôler le résultat.

01 Donner un sens au taux

Exercice 1 — Un taux, trois informations

On considère $f(x) = x^2 - 4x + 1$. On travaille au point d'abscisse 1.

1. Calculer $f(1)$ et $f(3)$. Déterminer le coefficient directeur de la sécante reliant ces deux points de la courbe.
2. Pour $h \neq 0$, simplifier $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$ avant de faire tendre h vers 0. En déduire $f'(1)$ par la définition.
3. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
4. Lina affirme : « La sécante est horizontale, donc la tangente l'est aussi. » Réfuter cette conclusion en distinguant les deux nombres calculés.

Exercice 2 — Une famille de tangentes qui garde un point

Pour $m \in \mathbb{R}$, on pose $f_m(x) = x^2 + (m-2)x + 3$.

1. Calculer $f_m(1)$ puis, par un taux de variation, $f'_m(1)$.
2. Établir l'équation de la tangente T_m à la courbe de f_m en 1. Montrer que toutes ces droites passent par un même point que l'on précisera.
3. Déterminer m pour que T_m ait pour coefficient directeur -3.
4. Calculer $f_m(x) - (mx + 2)$. Quelle information sur le contact en $x = 1$ reste indépendante de m ?

Exercice 3 — Le point que l'on ne peut pas simplifier

La fonction r est définie par $r(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$ sur son ensemble de définition.

1. Préciser cet ensemble, puis simplifier l'expression sans modifier le domaine.
2. Déterminer $r'(2)$ par la définition. Peut-on écrire $r'(3)$?
3. On complète la fonction en posant $R(3) = 6$ et $R(x) = r(x)$ si $x \neq 3$. Montrer que R est dérivable en 3 et calculer $R'(3)$.
4. Expliquer la première erreur dans : « $r(x) = x + 3$, donc $r(3) = 6$ et $r'(3) = 1$. »

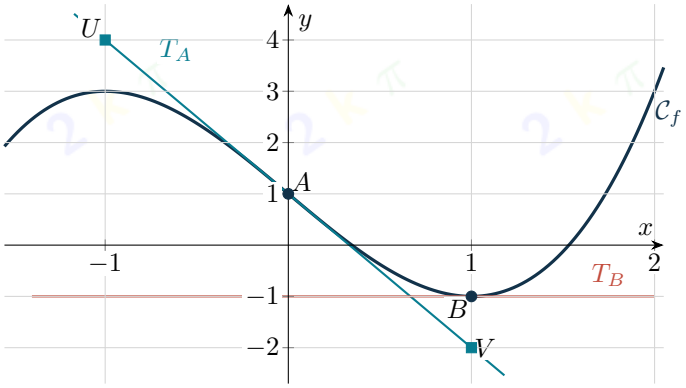
Exercice 4 — Rationaliser avant d'approcher

On pose $f(x) = \sqrt{x+5}$ pour $x \geq -5$.

1. Pour $h \neq 0$ et h suffisamment proche de 0, transformer $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$ en multipliant par une expression conjuguée.
2. En déduire $f'(4)$ et l'équation de la tangente à la courbe en 4.
3. Utiliser cette tangente pour proposer une valeur approchée de $\sqrt{9{,}12}$.
4. Calculer le carré de la valeur proposée. Cette approximation est-elle par excès ou par défaut ? Justifier sans étude de variations.

Exercice 5 — Lire les bonnes droites

Le graphique représente une fonction f dérivable. Les points A et B sont sur sa courbe. Les droites T_A et T_B sont les tangentes en ces points ; U et V appartiennent à T_A. Les points marqués sont sur des nœuds du quadrillage : leurs coordonnées se lisent exactement.



1. Lire $f(0)$ et $f(1)$. Calculer $f'(0)$ à l'aide de deux points de la tangente, puis donner $f'(1)$.
2. Justifier d'abord la formule générale $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ à partir du point de contact et de la pente. Écrire ensuite les équations des tangentes en A et en B.
3. Déterminer la pente de la sécante (AB). Expliquer pourquoi elle diffère de $f'(0)$.
4. Peut-on affirmer que $f(0{,}1) = 0{,}7$? Préciser ce que la tangente permet de proposer, et ce qu'elle ne donne pas exactement.

Exercice 6 — Trois valeurs ne font pas une dérivée

Défi flash

On sait seulement qu'une fonction dérivable vérifie $f(-1) = 1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

1. Ces trois données imposent-elles $f'(0) = 0$? Pour décider, examiner $p(x) = x^2$ et $q(x) = x^2 + x(x^2-1)$.
2. Donner une donnée locale supplémentaire qui permettrait de connaître $f'(0)$.

Exercice 7

Des puissances au nombre dérivé

Atelier structurant

Soit un entier $n \geq 2$. Pour des réels x, a, on considère $S_n(x,a) = x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}$.

1. Développer $(x-a)S_n(x,a)$ en faisant apparaître les annulations. En déduire une factorisation de $x^n - a^n$.
2. En posant $x = a + h$, utiliser cette identité pour établir, par la définition, la dérivée de $x \mapsto x^n$ en a. Traiter aussi $a = 0$.
3. Pour un entier $m \geq 1$ et $a \neq 0$, utiliser le résultat précédent et la règle de l'inverse pour obtenir la dérivée de $x \mapsto x^{-m}$.
4. Que faut-il écrire séparément pour la fonction constante $x \mapsto 1$?

02 Choisir la bonne écriture

Exercice 8

Deux chemins, une identité

On considère $f(x) = (x-1)(x^2+x+1)$.

1. Calculer f' par la règle du produit, puis réduire le résultat.
2. Trouver une écriture plus courte de f et dériver à partir de celle-ci. Comparer les charges de calcul.
3. Un élève obtient $f'(x) = 2x + 1$ en multipliant les dérivées des deux facteurs. Repérer sa première étape fautive et la réfuter aussi par une valeur simple.
4. Déterminer la tangente à la courbe en $x = 1$.

Exercice 9

Le quotient qui se décompose

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$.

1. Préciser le domaine et écrire $f(x)$ sous la forme $x + 1 + \dfrac{c}{x+1}$.
2. Calculer f' à partir de cette décomposition, puis vérifier le résultat avec la règle du quotient.
3. Déterminer toutes les abscisses des tangentes horizontales et leurs équations, sans dresser de tableau de variations.
4. Expliquer pourquoi la valeur interdite ne peut réapparaître après réduction de f'.

Exercice 10

Inverser, puis retrouver le point manquant

Pour $x \neq 0$, on pose $u(x) = x + \dfrac{1}{x}$, puis $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$.

1. Montrer que $u(x) \neq 0$ sur son domaine, puis préciser le domaine de f.
2. Calculer f' par la règle de l'inverse. Vérifier en écrivant $f(x)$ comme un quotient de polynômes.
3. On pose $F(0) = 0$ et $F(x) = f(x)$ ailleurs. Calculer $F'(0)$ par la définition.
4. Donner l'équation de la tangente à la courbe de F en 0 et expliquer pourquoi cette tangente ne concerne pas la fonction f en 0.

Exercice 11 — Une racine, deux obstacles

On considère $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$.

1. Déterminer le domaine de définition, puis un ensemble sur lequel les règles usuelles garantissent la dérivabilité.
2. Calculer f' sur cet ensemble en réunissant les termes du numérateur avant de conclure.
3. La valeur $f(0)$ existe. Étudier le taux $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ pour $h>0$. Admet-il une limite réelle finie ?
4. Expliquer pourquoi le seul fait qu'une expression existe en un point ne permet pas d'y appliquer automatiquement la formule de sa dérivée.

Exercice 12 — Des données locales qui suffisent

Les fonctions f et g sont dérivables au voisinage de 2. On sait que $f(2)=3$, $f'(2)=-1$, $g(2)=-2$ et $g'(2)=4$. Pour les justifications locales, on pourra écrire $f(2+h)-f(2)=h\tau_f(h)$, où $\tau_f(h)$ est le taux de f en 2, et de même pour g.

1. Déterminer la valeur et le nombre dérivé en 2 de $h=fg$.
2. Déterminer le nombre dérivé en 2 de $q=f/g$ et de $r=1/f$. Justifier les conditions locales nécessaires.
3. Écrire l'équation de la tangente à la courbe de h en 2.
4. Ces quatre données permettent-elles de connaître $h(3)$? Justifier la limite de ce que l'on peut conclure.

Exercice 13 — Localiser la première règle fausse

Défi flash

Deux copies proposent les calculs suivants, sur les domaines où les expressions sont définies.

1. Pour $F(x)=(x^2+1)(3x-2)$: $F'(x)=(2x)\times 3=6x$. Identifier la première égalité non justifiée, puis calculer la dérivée correcte.
2. Pour $G(x)=\dfrac{x^2+1}{x+2}$: $G'(x)=\dfrac{2x}{1}=2x$. Corriger la règle, le résultat et le domaine.
3. Pour chacune des deux copies, choisir une valeur de x qui distingue les deux résultats.

Exercice 14 — Ce qu'une dérivée ne raconte pas

On sait qu'une fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $u'(x)=2x-1$. On ne connaît pas $u(1)$.

1. Déterminer $u'(1)$. Peut-on en déduire la valeur en 1 de la dérivée de u^2 ?
2. Examiner la famille $u_C(x)=x^2-x+C$ pour justifier la réponse précédente par deux exemples.
3. En dérivant un produit, établir $(u^2)'=2uu'$, puis $(u^3)'=3u^2u'$.
4. Quelle donnée supplémentaire permettrait de calculer ces deux nombres dérivés en 1 ? Donner leurs valeurs si cette donnée vaut -2.

03 Imposer et interpréter une tangente

Exercice 15 — Une pente ne suffit pas à la tangence

Soit $f(x) = x^2 + 2x$. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note T_a la tangente à sa courbe au point d'abscisse a.

1. Établir l'équation $T_a : y = (2a + 2)x - a^2$. Pour $a = 0$, construire T_0 dans un repère. Expliquer comment le nombre dérivé et le point de contact permettent de placer un second point de la droite.
2. Les droites $d_1 : y = 6x - 4$ et $d_2 : y = 6x + 4$ ont la même pente. Laquelle est une tangente à la courbe ? Préciser le point de contact et réfuter l'autre possibilité.
3. Déterminer toutes les tangentes à la courbe qui passent par $P(0; -9)$.
4. Quelle condition sur l'ordonnée c du point $(0; c)$ permet l'existence d'au moins une tangente passant par ce point ? Distinguer les nombres de tangentes possibles.

Exercice 16 — Un contact carré, un contact quotient

On considère $f(x) = x^2$, $g(x) = 8/x$ pour $x \neq 0$ et la droite $d : y = -8x - 16$. La droite est donnée comme candidate : il faut certifier ses contacts, puis décider si une autre tangente commune est possible.

1. Factoriser $f(x) - (-8x - 16)$ et $g(x) - (-8x - 16)$, sur leurs domaines respectifs. Déterminer les points d'intersection de d avec chacune des courbes.
2. Calculer les pentes aux points trouvés. Vérifier que d est tangente aux deux courbes, en deux points distincts.
3. Pour une tangente commune quelconque, noter a le contact avec f et $b \neq 0$ le contact avec g. Écrire les deux tangentes. En identifiant pente et ordonnée à l'origine, montrer que $b^3 = -1$, puis conclure à l'unicité. On pourra factoriser $b^3 + 1$.
4. Pourquoi la seule égalité des pentes n'aurait-elle pas suffi ? Pourquoi ne peut-on jamais retenir $b = 0$, même après une multiplication des équations par une puissance de b ?

Exercice 17 — Reconstruire puis enlever une donnée

On cherche un polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ tel que $f(0) = 4$, $f(1) = 2$ et $f'(1) = -1$.

1. Traduire les trois données en un système et déterminer a, b, c.
2. Vérifier les trois conditions dans la fonction obtenue, puis donner sa tangente en 1.
3. Si l'on retire seulement la donnée $f(0) = 4$, décrire toutes les fonctions de cette famille qui conviennent encore.
4. Dans cette dernière famille, donner une fonction affine et une fonction réellement du second degré. Ont-elles la même tangente en 1 ?

Exercice 18 — Modifier la courbe, imposer sa tangente

On part de $p(x) = x^3$ et on définit $f(x) = p(x) + \lambda(x-1) + \mu$.

1. Déterminer λ et μ pour que la tangente à la courbe de f en 1 soit $d : y = 2x + 1$.
2. Vérifier séparément le passage par le point de contact et l'égalité des pentes.
3. Factoriser $f(x) - (2x+1)$. Que retrouve-t-on en remplaçant x par 1 ?
4. La courbe et d ont-elles un autre point commun ? Ce second point est-il lui aussi un point de tangence ?

Exercice 19 — Mesurer l'erreur de la tangente

On considère $f(x) = 1/x$ au voisinage de 2.

1. Pour $a \neq 0$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \neq 0$, simplifier le taux de f en a. En déduire $f'(a)$, puis $f'(2)$ et l'équation de la tangente en 2.
2. Pour $h \neq -2$, établir l'identité $\dfrac{1}{2+h} - \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{h}{4}\right) = \dfrac{h^2}{4(2+h)}$.
3. Donner une approximation affine de $1/2{,}04$ et préciser si elle est par excès ou par défaut.
4. Si $|h| \leq 0{,}1$, montrer que la valeur absolue de l'erreur est au plus $h^2/7{,}6$. Cette information nécessite-t-elle une étude de variations ?

Exercice 20 — Une vitesse peut être négative

La position d'un mobile sur un axe orienté est modélisée, pour $t \geq 0$, par $s(t) = t^3 - 6t^2 + 10t$, en mètres ; t est exprimé en secondes.

1. Calculer $s(2)$ puis le taux moyen $\dfrac{s(2+h) - s(2)}{h}$, pour $h \neq 0$ et $2 + h \geq 0$. Interpréter ce taux comme vitesse moyenne entre les deux instants.
2. En déduire la vitesse instantanée en 2 par la définition. Interpréter son signe et donner son unité.
3. Calculer $s'(t)$, puis retrouver le résultat précédent. Déterminer les instants $t \geq 0$ où la vitesse algébrique vaut -2.
4. Un élève écrit : « La position $s(2)$ est positive, donc la vitesse en 2 est positive. » Expliquer pourquoi il confond deux informations.

Exercice 21 — Une unité supplémentaire

Une entreprise modélise son coût, en euros, par $C(q) = 0{,}02q^2 + 3q + 120$ pour $q \geq 0$. Le modèle accepte des valeurs réelles de q ; les quantités effectivement produites sont entières.

1. Calculer $C'(50)$ et l'interpréter comme coût marginal dans le modèle.
2. Calculer le coût exact d'une unité supplémentaire à partir de 50 unités, puis le comparer au nombre dérivé.
3. Calculer $\dfrac{C(51) - C(49)}{2}$. Pourquoi le dénominateur est-il 2 ? Comparer à $C'(50)$.
4. Pour $h > 0$, établir une formule du taux $\dfrac{C(50+h) - C(50)}{h}$ et retrouver par sa limite l'écart observé pour une unité.

04 Examiner les frontières

Exercice 22 — L'angle disparaît après multiplication

On considère $f(x) = |x-2|$ et $g(x) = (x-2)|x-2|$.

1. Étudier les taux de variation de f en 2 pour $h > 0$ puis pour $h < 0$. Conclure sur sa dérivabilité.
2. Calculer le taux de variation de g en 2. En déduire $g'(2)$.
3. Pourquoi ne pouvait-on pas appliquer directement en 2 le théorème de dérivation d'un produit à l'écriture de g ?
4. Écrire g sans valeur absolue de part et d'autre de 2, dériver sur ces deux intervalles et vérifier la cohérence avec le nombre dérivé obtenu en 2.

Exercice 23 — Raccorder la valeur puis la pente

Pour deux réels a, b, on définit $f(x) = x^2$ si $x \leq 1$, et $f(x) = ax + b$ si $x > 1$.

1. Quelle est la valeur $f(1)$? Déterminer la condition sur a, b pour que les valeurs de la branche de droite tendent vers $f(1)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs supérieures.
2. Écrire le taux $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ pour $h < 0$, puis pour $h > 0$, sans supposer encore la condition précédente.
3. Déterminer tous les couples (a, b) pour lesquels f est dérivable en 1, puis donner la tangente.
4. Proposer un couple qui raccorde les valeurs mais pas les pentes, et calculer les deux limites de taux correspondantes.

Exercice 24 — Même symbole racine, trois comportements

On compare $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{x^2}$ et $h(x) = \sqrt{x^4}$.

1. Donner leurs domaines, puis étudier le taux de f en 0 depuis la droite. Existe-t-il un nombre dérivé réel fini ?
2. Simplifier g pour tout réel x. Étudier sa dérivabilité en 0 sans utiliser une formule de composition.
3. Simplifier h pour tout réel x et calculer $h'(0)$.
4. Réfuter : « Dès qu'une expression contient une racine dont le contenu s'annule, la fonction n'est pas dérivable. » Préciser aussi la limite d'emploi de la formule usuelle de dérivation d'une racine.

Exercice 25 — Une tangente peut-elle traverser la courbe ?

Défi flash

On considère $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2$ au point d'abscisse 0.

1. Calculer leurs nombres dérivés en 0 par la définition et donner leurs tangentes en ce point.
2. Pour chacune des deux fonctions, comparer algébriquement sa valeur à celle de sa tangente pour $x < 0$ et pour $x > 0$.
3. Réfuter : « Une tangente ne traverse jamais une courbe. » Une tangente horizontale suffit-elle à décider s'il y a traversée ?

Exercice 26 — Une racine et un point manquant

On pose $r(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ sur son ensemble de définition.

1. Déterminer cet ensemble, puis rationaliser l'expression. Expliquer pourquoi la simplification ne donne pas encore une valeur à $r(0)$.
2. On prolonge r en posant $R(0) = 1/2$. Donner une expression unique de R sur $[-1, +\infty[$.
3. Pour $h \neq 0$ assez proche de 0, montrer que $\dfrac{R(h)-R(0)}{h} = -\dfrac{1}{2(\sqrt{1+h}+1)^2}$. En déduire $R'(0)$ et la tangente.
4. Étudier le taux de R en -1 depuis la droite. Pourquoi le prolongement en 0 ne règle-t-il pas la dérivabilité à l'autre bord ?

05 Composer avec des règles établies

Exercice 27 — Le facteur oublié dans une composition

Atelier structurant

Atelier guidé : on établit ici la règle pour une composition affine. On suppose u définie près de b, dérivable en b, avec $u(b) = 3$ et $u'(b) = -2$. On pose $f(x) = u(4x+b)$ près de 0.

1. Écrire le taux de f en 0 comme 4 fois un taux de u en b. En déduire $f(0)$, $f'(0)$ et la tangente.
2. Pour $F(x) = u(ax+b)$ et $a \neq 0$, établir de même $F'(0) = a\,u'(b)$. Traiter séparément $a = 0$.
3. En appliquant la règle en un point quelconque, dériver $p(x) = (5x-1)^4$. Identifier fonction intérieure et fonction extérieure.
4. Dériver $q(x) = 1/(2-3x)$ en précisant son domaine et son ensemble de dérivabilité.
5. Donner le domaine de $s(x) = \sqrt{7-2x}$ et sa dérivée là où la formule s'applique. Au bord du domaine, étudier directement le taux unilatéral.

Exercice 28 — Des carrés emboîtés sans développement géant

On pose $p(x) = \big((x^2-1)^2+2\big)^2$. On s'interdit de développer complètement le polynôme.

1. Nommer trois expressions successives qui permettent de construire p à partir de x.
2. Rappeler la formule de dérivation d'un carré w^2 à l'aide de la règle du produit, puis l'appliquer successivement pour dériver p sous forme factorisée.
3. Calculer $p(1)$ et $p'(1)$. Donner l'équation de la tangente en 1.
4. Un élève ne conserve que $2\big((x^2-1)^2+2\big)$ comme dérivée. Quelle est sa première omission ? Vérifier le désaccord en $x = 1$.

Exercice 29 — Démontrer une règle pour une racine composée

Atelier structurant

On suppose u dérivable en a et $u(a) > 0$. On note $\tau(h) = [u(a+h) - u(a)]/h$ pour $h \neq 0$ assez petit. Cet atelier établit une règle, sans la supposer connue.

1. À partir de $u(a+h) = u(a) + h\tau(h)$, expliquer pourquoi $u(a+h)$ tend vers $u(a)$ et reste strictement positif pour h suffisamment petit.
2. Rationaliser le taux de $v(x) = \sqrt{u(x)}$ en a. En déduire une expression de $v'(a)$.
3. Pour $u(x) = x^2 + x + 1$, justifier $u(x) > 0$ pour tout réel x. Dériver $v(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$ et donner la tangente en 0.
4. Quelle hypothèse interdit d'utiliser cette preuve telle quelle lorsque $u(a) = 0$? Examiner en 0 les deux exemples $u(x) = x^2$ et $u(x) = x^4$ pour montrer que plusieurs comportements restent possibles.

Exercice 30 — L'ordre des fonctions compte

Prolongement guidé. On admet pour cet exercice : si u est dérivable en a et v dérivable en $u(a)$, alors $(v \circ u)'(a) = v'(u(a))u'(a)$, où $(v \circ u)(x) = v(u(x))$. On dispose des données $u(1) = 2$, $u'(1) = -3$, $v(2) = 5$, $v'(2) = 4$; les fonctions sont définies et dérivables dans les voisinages nécessaires.

1. Déterminer $(v \circ u)(1)$ et $(v \circ u)'(1)$. Donner la tangente correspondante.
2. Ces seules données permettent-elles de déterminer $(u \circ v)'(1)$? Indiquer précisément les informations qui manquent.
3. On considère maintenant $r(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2+1}}$. Donner son domaine et justifier que chaque étage est dérivable en tout réel.
4. Dériver r sans développer de fraction inutile. Identifier les trois facteurs provenant des étages de composition et contrôler le résultat en 0.

06 Démontrer et synthétiser

Exercice 31 — Pourquoi la règle du produit fonctionne

Atelier structurant

On suppose u et v définies près de a et dérivables en a. On pose $p = uv$.

1. En ajoutant puis retranchant $u(a+h)v(a)$ au numérateur, décomposer le taux de p en une somme de deux termes faisant apparaître les taux de u et de v.
2. Montrer, à l'aide de son taux, que $u(a+h)$ tend vers $u(a)$. Passer alors à la limite dans la décomposition et démontrer la règle du produit.
3. Que devient $p'(a)$ si $u(a) = v(a) = 0$? Expliquer pourquoi cela ne signifie pas que p est nulle près de a.
4. Les deux facteurs doivent-ils nécessairement être dérivables pour que leur produit le soit ? Examiner par son taux le produit $(x-2)|x-2|$ en 2, puis distinguer la validité d'un théorème de sa réciproque.

Exercice 32 — Puissances : les hypothèses ne disparaissent pas

On suppose u dérivable sur un intervalle I. Dans la première question, on définit $w(x) = 1$ sur I, sans écrire $u(x)^0$ aux zéros éventuels de u.

1. Donner w'. Pourquoi l'expression $0\,u(x)^{-1}u'(x)$ n'est-elle pas une justification valable lorsque $u(x) = 0$?
2. Aux points où $u(x) \neq 0$, dériver $z(x) = u(x)^{-2}$ en l'écrivant $(1/u(x))^2$ et en utilisant uniquement l'inverse et le produit.
3. Appliquer à $u(x) = x^2 - 1$ en donnant exactement le domaine de z, puis calculer $z'(0)$.
4. Un élève prétend que connaître une formule pour z' permet de définir z et sa dérivée aux points -1 et 1. Réfuter en rappelant la définition initiale de z.

Exercice 33 — Deux tangentes de même pente, un paramètre dégénéré

Pour deux réels a, b, on pose $f(x) = \dfrac{ax + b}{x + 1}$ pour $x \neq -1$. On cherche d'abord les paramètres tels que $f(0) = 2$ et $f'(0) = 3$.

1. Dériver l'expression générale et déterminer a, b.
2. Pour les paramètres trouvés, donner la tangente en 0. Trouver toutes les autres abscisses où la pente de la tangente vaut aussi 3.
3. Donner l'équation de cette autre tangente. Les deux droites sont-elles confondues ? Justifier.
4. Revenir aux paramètres généraux : que se passe-t-il lorsque $a = b$? Donner alors la dérivée et préciser ce que devient le point interdit.

Exercice 34 — Même valeur, même pente ou même tangente ?

On considère $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = f(x) + (x - 1)^2(x + 2)$.

1. Déterminer toutes les abscisses où les deux courbes ont un point commun.
2. Sans développer g complètement, montrer que $g'(x) - f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$. Déterminer les abscisses où les deux pentes sont égales.
3. En déduire tous les points communs où les courbes ont la même tangente. Donner cette tangente.
4. Comparer les situations en $x = -2$ et en $x = -1$: calculer les valeurs et les pentes nécessaires pour expliquer pourquoi aucune des deux situations ne suffit à elle seule.

Exercice 35 — Reconstruction : unique dans quelle famille ?

On cherche un polynôme $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dont la courbe passe par $A(0, 1)$ avec tangente $y = 2x + 1$, et par $B(1, 0)$ avec une tangente horizontale.

1. Traduire les données en quatre équations sur a, b, c, d.
2. Résoudre ce système et vérifier séparément les deux valeurs et les deux pentes.
3. Si l'on retire seulement l'horizontalité en B, décrire tous les polynômes de cette famille qui satisfont les trois autres conditions.
4. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, poser $F_\lambda(x) = f(x) + \lambda x^2(x - 1)^2$, avec f trouvé à la question 2. Vérifier les quatre données pour F_λ. Que signifie donc l'unicité obtenue à la question 2 ?

Exercice 36

Deux programmes de sécantes

Atelier structurant

On prend $f(x) = x^3 - 2x$. Le programme ci-dessous se lit aussi sur papier : `h` est un pas strictement positif.

```
def f(x):
    return x**3 - 2*x

def taux(h):
    avant = (f(1+h) - f(1)) / h
    centre = (f(1+h) - f(1-h)) / (2*h)
    return avant, centre

for h in [0.5, 0.25]:
    print(h, taux(h))
```

1. Justifier les deux dénominateurs par les abscisses des points utilisés. Pourquoi $h = 0$ est-il interdit ?
2. Établir les expressions exactes des deux taux en fonction de h, puis donner leurs limites lorsque h tend vers 0.
3. Faire la trace des deux lignes affichées. Comparer les écarts à $f'(1)$ pour chacun des deux pas.
4. On remplace par erreur `2*h` par `h` dans le taux centré. Quelle limite obtient-on alors ? Pourquoi une suite numérique qui semble se stabiliser ne prouve-t-elle pas, à elle seule, qu'on approche le bon nombre dérivé ?
5. Autre organisation : fixer le pas $h = 0{,}1$ et faire varier a dans la liste $[0, 1, 2]$. Écrire une boucle Python affichant a et $(f(a+h) - f(a))/h$. Simplifier ce taux en fonction de a, h, puis donner les trois valeurs exactes attendues pour ce pas.