TROISIÈME OBJECTIF 1

# APPROFONDISSEMENT CALCULATOIRE

## Je résous une équation

Écrire des transformations justifiées, conserver les valeurs exactes et contrôler les solutions. Sauf indication contraire, les inconnues sont des nombres réels.

## 01 Comprendre et contrôler une égalité

### Exercice 1 Tester une solution, ce n'est pas résoudre

Pour chaque égalité, tester les deux valeurs proposées en calculant séparément les membres. Indiquer les valeurs qui conviennent.

**a)** $4x - 7 = 2x + 3$ ; $x = 5$ puis $x = -5$.

**b)** $3(x - 2) = x + 4$ ; $x = 2$ puis $x = 5$.

**c)** $2x^2 - 3x = 5$ ; $x = -1$ puis $x = 2$.

**d)** $\dfrac{6}{x+1} = 3$ ; $x = -1$ puis $x = 1$.

### Exercice 2 Une égalité qui reste vraie

On sait que $A = B$. Pour chaque proposition, dire si elle est nécessairement vraie, puis justifier par une règle ou un contre-exemple.

**a)** $A - 7 = B - 7$ et $-3A = -3B$.

**b)** $A + 4 = B - 4$ ; $A/5 = B/5$.

**c)** $0A = 0B$. Peut-on retrouver $A = B$ à partir de cette seule égalité ?

**d)** Pour $5x - 4 = 11$, écrire deux transformations réversibles qui isolent $x$.

### Exercice 3 Automatismes : isoler l'inconnue

Résoudre sans calculatrice. Donner la valeur exacte ; vérifier les réponses b) et e) par substitution.

**a)** $x + 9 = -4$

**b)** $-6x = 21$

**c)** $7 - 3x = 19$

**d)** $\dfrac{x}{-4} = 6$

**e)** $2 - 5x = -1$

**f)** $0{,}8x - 1{,}2 = 2$

### Exercice 4 Repérer la première erreur

Chaque raisonnement contient une première égalité ou implication incorrecte. Repérer cette ligne, la corriger et terminer la résolution.

**a)** $-4x + 3 = 11 \Rightarrow -4x = 8 \Rightarrow x = 2$.

**b)** $3(x - 5) = 12 \Rightarrow 3x - 5 = 12 \Rightarrow x = 17/3$.

**c)** $2x - 7 = x + 4 \Rightarrow 2x + x = 4 + 7 \Rightarrow x = 11/3$.

**d)** $5 - 2(x + 1) = 1 \Rightarrow 5 - 2x + 2 = 1 \Rightarrow x = 3$.

## 02 Transformer avant de résoudre

### Exercice 5 L'inconnue dans les deux membres

Résoudre les équations en regroupant les termes de même nature. Pour c) et f), privilégier une démarche qui garde un coefficient de $x$ positif.

**a)** $8x - 5 = 3x + 12$
**b)** $-2x + 9 = 5x - 12$
**c)** $4x + 1 = 9x - 6$
**d)** $6 - 7x = 2 - 3x$
**e)** $-5x - 8 = -9x + 2$
**f)** $1 - 8x = 4x - 5$

### Exercice 6 Distribuer, puis réduire

Résoudre. Pour chaque équation, montrer au moins une ligne de développement avant de réduire.

**a)** $4(x - 3) = 2x + 7$
**b)** $-3(2x - 1) = x + 10$
**c)** $7 - 2(3x + 4) = 5x - 12$
**d)** $5(2 - x) - 3(x - 4) = 6$
**e)** $3(2x + 5) - 4(x - 1) = 2x + 19$
**f)** $2(3x - 4) = 3(2x + 1)$

### Exercice 7 Parenthèses imbriquées

Résoudre les équations suivantes. Dans b) et d), expliquer le rôle du signe placé devant la grande parenthèse.

**a)** $2[3x - (x - 4)] = 18$
**b)** $9 - [2x - 3(x - 1)] = 14$
**c)** $3[2(x + 1) - 5] = x + 6$
**d)** $4 - 2[5 - (3x - 1)] = x + 2$

### Exercice 8 Voir l'annulation avant le développement

Résoudre en cherchant d'abord ce qui peut se simplifier dans les deux membres. Pour d), expliquer pourquoi l'équation se ramène au premier degré.

**a)** $7(x - 2) + 5 = 7(x - 2) + 3x - 4$
**b)** $5(2x + 1) = 3(2x + 1) + 14$
**c)** $4(x + 3) - 2(x + 3) = 10$
**d)** $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 2x + 12$

## 03 Reconnaître les cas particuliers

### Exercice 9 Deux chemins, une solution

Pour chaque équation, expliquer quel premier geste économise le plus de calculs, puis résoudre. Pour a), présenter aussi une deuxième méthode.

**a)** $6(x - 4) = 30$
**b)** $12(x + 1) = 8(x + 1) + 20$
**c)** $3(5x - 2) = 15x - 6$
**d)** $\dfrac{3x - 2}{5} = 4$

### Exercice 10 Une, aucune ou une infinité de solutions ?

Sans chercher systématiquement une valeur de $x$, ramener chaque égalité à la forme $ax = b$. Préciser l'ensemble des solutions.

**a)** $4(x - 2) = 4x - 8$
**b)** $3(2x - 1) = 6x + 1$
**c)** $7 - 2(x + 3) = 1 - 2x$
**d)** $(x - 4)(x + 4) = x^2 - 15$
**e)** $8x - 3 = 7x - 3$
**f)** $0(x - 7) = 5$

### Exercice 11 Un coefficient qui change tout

Le nombre $m$ est fixé ; on cherche les solutions en $x$ de $mx + 6 = 4x + 2$.

**a)** Résoudre successivement pour $m = 6$, $m = 2$, puis $m = 4$.
**b)** Pour quelle valeur de $m$ le nombre $x = -1$ est-il solution ?
**c)** Ramener l'équation à la forme $(m - 4)x = -4$. Expliquer quand on peut diviser par $m - 4$.
**d)** On remplace maintenant le 2 du membre droit par 6. Que devient l'ensemble des solutions pour $m = 4$, puis pour $m \neq 4$ ?

### Exercice 12 Fabriquer une équation à partir d'une solution

Déterminer les constantes demandées, puis vérifier que les conditions sont bien satisfaites.

**a)** Trouver $a$ pour que $3x + a = 7$ ait pour solution $x = -2$.

**b)** Trouver $b$ pour que $5(x - 1) = bx + 4$ ait pour solution $x = 3$.

**c)** Choisir $c$ pour que $4(x + 2) = 4x + c$ soit vraie pour tout réel $x$.

**d)** Peut-on choisir $d$ pour que $2x + 1 = 2x + d$ ait exactement une solution ? Justifier.

## 04 Maîtriser les fractions numériques

### Exercice 13 Des dénominateurs numériques

Résoudre en conservant les valeurs exactes. Choisir un multiple commun des dénominateurs lorsque cela simplifie la résolution.

**a)** $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{6} = 5$

**b)** $\dfrac{2x - 1}{4} = \dfrac{x + 5}{6}$

**c)** $\dfrac{5x}{8} - \dfrac{x}{12} = \dfrac{13}{24}$

**d)** $\dfrac{x - 2}{5} + \dfrac{x + 1}{2} = 3$

**e)** $\dfrac{2x}{9} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{x - 1}{6}$

**f)** $\dfrac{3x + 6}{4} - \dfrac{x - 2}{8} = 2$

### Exercice 14 Le signe devant une fraction

Résoudre en faisant apparaître les parenthèses nécessaires lorsque l'on supprime les dénominateurs.

**a)** $2 - \dfrac{x - 3}{4} = \dfrac{x + 1}{2}$

**b)** $\dfrac{1 - 2x}{3} - \dfrac{3 - x}{5} = 1$

**c)** $-\dfrac{3(x - 2)}{7} + \dfrac{x + 1}{2} = 2$

**d)** $\dfrac{x + 4}{-3} = \dfrac{2 - x}{5}$

### Exercice 15 Décimaux, fractions et pourcentages

Résoudre exactement ; choisir entre écriture décimale et fractionnaire. Dans d), le symbole % signifie « sur 100 ».

**a)** $0{,}25x + 1{,}5 = \dfrac{x}{2}$

**b)** $0{,}4(x - 2) = 1{,}2 - 0{,}1x$

**c)** $\dfrac{3x - 1}{5} = 0{,}2x + 1{,}4$

**d)** $15\% \times x + 12 = 25\% \times x$

### Exercice 16 Éliminer les dénominateurs sans rien oublier

Pour chaque situation, justifier le geste proposé ou le corriger, puis résoudre.

**a)** Dans $\dfrac{x}{4} + 3 = \dfrac{x - 1}{6}$, un élève multiplie par 12 et écrit $3x + 3 = 2(x - 1)$.

**b)** Dans $\dfrac{2x + 3}{5} = \dfrac{x - 4}{2}$, une copie écrit $5(2x + 3) = 2(x - 4)$.

**c)** Dans $\dfrac{x + 1}{3} - \dfrac{x - 2}{6} = 2$, compléter la ligne obtenue en multipliant par 6, puis résoudre.

**d)** Pour $\dfrac{2x - 6}{8} = \dfrac{x - 3}{4}$, comparer les deux fractions avant de résoudre.

## 05 Traiter les quotients avec une inconnue

### Exercice 17 Quotients : le domaine avant le calcul

Pour chaque équation, préciser les valeurs interdites, résoudre par produits en croix, puis vérifier que la solution appartient au domaine.

**a)** $\dfrac{x - 2}{x + 4} = \dfrac{2}{5}$

**b)** $\dfrac{7}{x - 3} = \dfrac{2}{3}$

**c)** $\dfrac{2x + 1}{x - 1} = 3$

**d)** $\dfrac{x + 5}{2x - 3} = \dfrac{3}{2}$

### Exercice 18 Deux dénominateurs qui dépendent de x

Déterminer le domaine et résoudre. La multiplication par les dénominateurs non nuls doit conduire à une équation du premier degré.

**a)** $\dfrac{3}{x+1} = \dfrac{5}{x-2}$

**b)** $\dfrac{4}{2x-1} = \dfrac{1}{x+3}$

**c)** $\dfrac{x+1}{x+3} = \dfrac{x-2}{x+1}$

**d)** $\dfrac{6}{x} = \dfrac{2}{x-4}$

### Exercice 19 Les valeurs interdites changent le verdict

Pour chaque équation, préciser le domaine avant toute transformation. Attention : une équation peut n'avoir aucune solution même si le calcul donne un candidat.

**a)** $\dfrac{x-3}{x-3} = 2$

**b)** $\dfrac{2x+4}{x+2} = 2$

**c)** $\dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{x-1}$

**d)** $\dfrac{x+2}{x-2} = \dfrac{4}{x-2}$

**e)** Expliquer pourquoi « $x = 1$ » n'est pas une solution de c), même si les produits en croix conduisent à cette valeur.

### Exercice 20 Choisir la méthode avant de calculer

Associer chaque équation à un premier geste adapté (développer, simplifier un bloc, éliminer un dénominateur numérique, déterminer les valeurs interdites). Puis résoudre.

**a)** $5(x+1) - 2(x+1) = 21$

**b)** $\dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{x+2}{6} = 4$

**c)** $\dfrac{x+2}{x+2} = 1$

**d)** $4 - (2 - 3x) = x + 8$

## 06 Programmes de calcul et raisonnement inverse

### Exercice 21 Remonter un programme de calcul

Un programme prend un nombre $x$, lui retranche 4, multiplie par $-3$, puis ajoute 5.

**a)** Exprimer le résultat $P(x)$ en fonction de $x$ sous deux formes différentes.

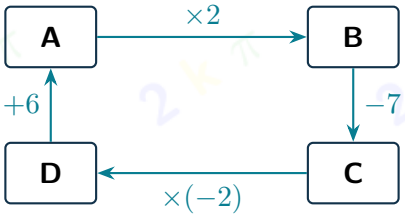
**b)** Retrouver le nombre de départ si le résultat vaut $-7$, en remontant les opérations.

**c)** Résoudre la même question par une équation et comparer les démarches.

**d)** Pour quelle valeur de $x$ le programme rend-il le nombre de départ ?

### Exercice 22 Un circuit qui revient au départ

On part de la case A. On applique successivement les opérations du schéma.




**a)** Exprimer les valeurs des cases B, C et D en fonction du nombre $x$ inscrit en A.

**b)** Trouver $x$ pour que l'opération de D vers A redonne le nombre initial.

**c)** Compléter les quatre cases et vérifier tout le circuit.

**d)** Si la dernière opération devient « ajouter $k$ », quel $k$ impose le départ $x = 3$ ?

### Exercice 23 Comparer des machines à calculer

On considère $A(x) = 4(x-2)+3$ et $B(x) = 2(3-x)-1$.

**a)** Réduire les deux expressions, puis calculer $A(2)$ et $B(2)$.

**b)** Pour quel nombre de départ les résultats sont-ils égaux ?

**c)** Pour quel nombre de départ sont-ils opposés ?

**d)** On définit $C(x) = A(x)+7$. L'équation $A(x) = C(x)$ a-t-elle une solution ? Expliquer sans résolution longue.

### Exercice 24 Reconstruire une machine à partir de ses sorties

Une machine multiplie l'entrée $x$ par un nombre constant $a$, puis ajoute un nombre constant $b$. On note $M(x) = ax + b$.

**a)** On sait que $M(0) = 7$ et $M(3) = -5$. Déterminer $b$, puis $a$.

**b)** On annonce aussi $M(-2) = 15$. Est-ce cohérent ? Cette donnée est-elle nécessaire à la reconstruction ?

**c)** Retrouver l'entrée qui donne $M(x) = 9$.

**d)** Si l'on connaissait seulement $M(3) = -5$, donner deux machines différentes compatibles et expliquer pourquoi les données sont insuffisantes.

### Exercice 25 Lire un tableau et justifier une conjecture

Un tableur affiche les résultats des deux expressions $A(x) = 3x+2$ et $B(x) = 14-x$.

**a)** Compléter le tableau sur papier :

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $A(x)$ | 2 | | | | |
| $B(x)$ | 14 | | | | |
| $A(x) - B(x)$ | | | | | |

**b)** Quelle valeur semble donner l'égalité ? Prouver qu'il n'y en a pas d'autre par une équation.

**c)** En cellule A2, on saisit une valeur de $x$. Donner les formules de tableur à saisir en B2 et C2 pour calculer $A(x)$ et $B(x)$.

**d)** Un élève affirme que deux colonnes consécutives du tableau suffisent toujours à trouver une solution entière. Tester cette idée pour $3x+2 = 15-x$.

## 07 Mettre en équation une situation

### Exercice 26 Nombres entiers et contraintes

Choisir une inconnue et écrire une équation. Vérifier si la solution correspond à la nature des nombres recherchés.

**a)** La somme de trois entiers impairs consécutifs vaut 81. Quels sont-ils ?

**b)** La somme de trois entiers pairs consécutifs vaut 81. Est-ce possible ?

**c)** Un nombre entier et son double ont pour somme 52. Que conclure ?

**d)** La différence entre deux entiers consécutifs est 1. Cette information permet-elle de les déterminer ? Justifier.

### Exercice 27 Comparer deux tarifs sans essayer au hasard

Un atelier de sport propose : formule A, 18 € d'inscription puis 4 € par séance ; formule B, 6 € d'inscription puis 6 € par séance. On note $n$ le nombre entier de séances, positif ou nul.

**a)** Exprimer les deux coûts $A(n)$ et $B(n)$.

**b)** Déterminer le nombre de séances pour lequel les deux tarifs sont égaux, et le coût commun.

**c)** À partir de combien de séances la formule A est-elle strictement moins chère ? Justifier avec la différence $A(n) - B(n)$.

**d)** Pour un budget de 65 €, combien de séances au maximum peut-on payer avec chaque formule ?

### Exercice 28 Répartir une somme, tenir compte d'une remise

Une classe achète 12 cahiers identiques et 3 classeurs. Un classeur coûte 2 € de plus qu'un cahier. Une remise de 10 % est appliquée au montant total ; la classe paie finalement 59,40 €.

**a)** En notant $x$ le prix initial d'un cahier, exprimer le montant avant remise.

**b)** Exprimer le montant payé et écrire une équation.

**c)** Déterminer les prix initiaux d'un cahier et d'un classeur.

**d)** Sans refaire toute la résolution, calculer le montant payé si l'on retire deux cahiers et conserve la même remise.

### Exercice 29 Partager un montant en fractions du total

Pour financer une sortie, une association reçoit une aide égale aux $\frac{2}{5}$ du prix total, puis une seconde aide de 48 €. Il reste 132 € à payer par les familles.

**a)** En notant $x$ le prix total, exprimer le montant restant à payer après les deux aides.

**b)** Écrire l'équation et calculer le prix total.

**c)** Calculer chacune des aides et vérifier que la somme des aides et du reste est égale au total.

**d)** Pour le même prix total, la première aide passe à $\frac{1}{2}$ du total. Quelle seconde aide faudrait-il pour que le reste soit de 100 € ?

### Exercice 30 Moyenne et quantité conservée

Une élève a obtenu quatre notes de même coefficient. Leur moyenne vaut 12,5 sur 20.

**a)** Calculer la somme des quatre notes.

**b)** Quelle cinquième note permettrait d'obtenir une moyenne de 13,6 ? Vérifier.

**c)** Une note parmi les quatre premières est corrigée de 9 à 11. Quelle cinquième note faudrait-il désormais pour atteindre 13,6 ?

**d)** À partir de la situation initiale, est-il possible d'obtenir une moyenne de 15 avec une seule note supplémentaire sur 20 ?

### Exercice 31 Les âges avancent ensemble

Une mère a 34 ans et son fils a 10 ans. On se place aux dates anniversaires, dans ce modèle où les âges sont exprimés en années entières. On note $t$ le nombre entier d'années écoulées à partir d'aujourd'hui ; $t < 0$ représente le passé.

**a)** Exprimer leurs deux âges dans $t$ années.

**b)** Dans combien d'années l'âge de la mère sera-t-il le double de celui du fils ?

**c)** Il y a combien d'années l'âge de la mère était-il le quadruple de celui du fils ?

**d)** Leur différence d'âge pourra-t-elle un jour valoir 20 ans ? Justifier par le calcul littéral.

## 08 Géométrie, formules et synthèses

### Exercice 32 Angles : vérifier la compatibilité des données

Les trois angles d'un triangle non aplati mesurent $x$, $2x + 12$ et $3x - 18$ degrés.

**a)** Écrire l'équation qui traduit la somme des angles du triangle.

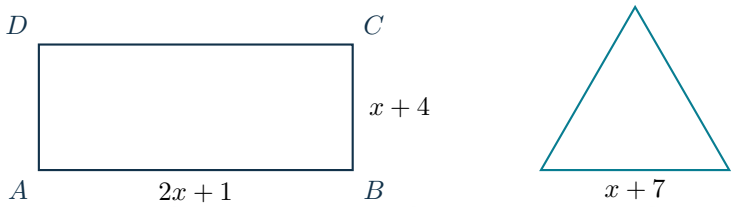
**b)** Résoudre, calculer chaque angle, puis vérifier leur somme et leur positivité.

**c)** Un autre triangle aurait pour angles $x$, $x + 45$ et $2x + 135$. Résoudre l'équation obtenue. Peut-on construire ce triangle ?

**d)** Construire une expression $ax + b$ pour le troisième angle d'un triangle dont les deux premiers angles valent $x$ et $2x + 15$.

### Exercice 33 Périmètres : construire l'équation avec la figure

Un rectangle $ABCD$ a pour côtés $AB = 2x + 1$ et $BC = x + 4$ (en cm). Un triangle équilatéral a un côté de longueur $x + 7$ cm. On impose $x \geq 0$.




Schémas non à l'échelle

**a)** Exprimer les deux périmètres et les réduire.

**b)** Pour quelle valeur de $x$ ces périmètres sont-ils égaux ? Donner les longueurs et contrôler.

**c)** Pour quelle valeur de $x$ le rectangle est-il un carré ? Le périmètre du carré est-il alors égal à celui du triangle ?

**d)** Le rectangle et le triangle peuvent-ils avoir un périmètre commun de 20 cm ? Justifier.

### Exercice 34 Thalès : une longueur inconnue des deux côtés

Dans le triangle $ABC$, $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$. Les droites $(DE)$ et $(BC)$ sont parallèles. On donne $AD = x + 1$, $DB = 6$, $AE = 5$ et $EC = 3$ en cm, avec $x > 0$.

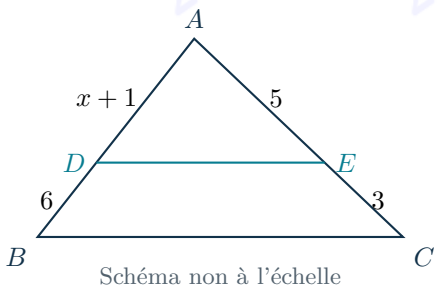



Schéma non à l'échelle

**a)** Exprimer $AB$ et $AC$. Écrire une égalité de rapports qui contient $x$.

**b)** Résoudre cette équation, en justifiant la non-nullité des dénominateurs.

**c)** En déduire $AD$ et $AB$, puis vérifier les deux rapports.

**d)** Si $BC = 12$ cm, calculer $DE$. Expliquer pourquoi cette donnée n'était pas nécessaire pour déterminer $x$.

## Exercice 35 Isoler une grandeur dans une formule

Dans chaque situation, écrire l'équation, indiquer les contraintes sur l'inconnue, puis calculer la grandeur demandée.

**a)** Un appareil de puissance $P = 480$ W est traversé par un courant d'intensité $I = 4$ A. Avec $P = UI$, déterminer la tension $U$ (en volts). Que faudrait-il vérifier avant de diviser par $I$ ?

**b)** On mélange 2 L d'une solution à 30 g/L de sel et $x$ L d'eau pure. La concentration finale est $\dfrac{60}{2+x}$ g/L. Déterminer $x \geq 0$ pour obtenir 12 g/L.

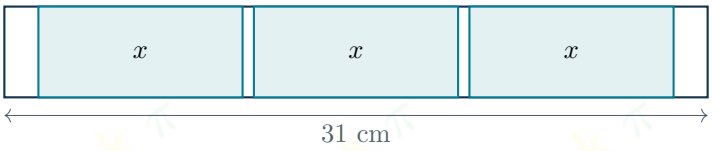
**c)** Un véhicule parcourt 2 km à 12 km/h, puis 1 km à $v > 0$ km/h. Sa vitesse moyenne sur ces 3 km vaut $\dfrac{18v}{v+6}$. Trouver $v$ pour une moyenne de 15 km/h.

**d)** Expliquer pourquoi une moyenne de 18 km/h n'est pas réalisable avec un réel $v > 0$.

## Exercice 36 Des carreaux à ajuster exactement

Une bande de longueur 31 cm contient trois carreaux carrés identiques de côté $x$ cm, séparés par des intervalles de 0,5 cm. À chaque extrémité, on laisse une marge de 1,5 cm.

Schéma des longueurs seulement, non à l'échelle




**a)** Combien y a-t-il d'intervalles entre les carreaux ? Écrire une équation traduisant la longueur totale.

**b)** Calculer $x$, puis vérifier la longueur totale.

**c)** On conserve la longueur de 31 cm et les marges, mais chaque intervalle mesure 1 cm. Déterminer le nouveau côté.

**d)** On revient aux carreaux de 9 cm et aux intervalles de 0,5 cm. Combien de carreaux peut-on placer exactement dans une bande de 40,5 cm en conservant les deux marges ? Justifier le nombre d'intervalles.

## Exercice 37 Synthèse : deux surfaces, une même longueur

Un panneau rectangulaire de hauteur 5 cm et de longueur $x+6$ cm est séparé en un rectangle de longueur $x$ et un rectangle de longueur 6 cm. Dans ce dernier, on découpe un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et 5 cm. On suppose $x > 0$.

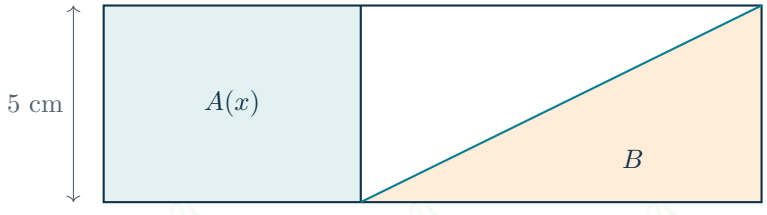



Schéma non à l'échelle

**a)** Exprimer les aires $A(x)$ du rectangle de longueur $x$ et $B$ du triangle.

**b)** Trouver $x$ pour que $A(x) = B$. Calculer alors l'aire du panneau entier.

**c)** On exige maintenant que le rectangle de longueur $x$ ait une aire au moins égale au double de celle du triangle. Déterminer les longueurs $x$ possibles.

**d)** Un élève affirme que l'aire du panneau vaut toujours $A(x) + B$. Vérifier son affirmation et déterminer l'aire de la chute.