BAC — Continuité

Terminale spécialité mathématiques — Faire Les 2kπ

Énoncés et extraits de sujets du baccalauréat

Exo 1 Refroidissement d'un café

Extrait — BAC Asie, 20 juin 2019

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant. Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, supposée constante, est notée M.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, en degré Celsius, et $T_0 = 80$. On choisit $M = 10$ et l'on a, pour tout entier naturel n,

$$T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10).$$

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
3. On pose $u_n = T_n - 10$.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
   (b) Montrer que $T_n = 70 \times 0,8^n + 10$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (T_n).
4. On cherche le premier instant où la température devient strictement inférieure à 40 °C.

Adaptation Python de l'algorithme officiel.

```python
def refroidissement():
    T = 80
    n = 0
    while T >= 40:
        T = 0.8*T + 2
        n += 1
    return n
```

Interpréter la valeur renvoyée dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On admet qu'il existe une unique fonction g modélisant la température du café et que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0,2t}.$$

Une personne aime boire son café à 40 °C. Montrer qu'il existe un unique réel $t_0 \geqslant 0$ tel que $g(t_0) = 40$. À l'aide du solveur numérique ou d'une table de valeurs de la calculatrice, donner l'arrondi de t_0 à la seconde (sans résoudre l'équation par logarithme).

Exo 2 Épuration du CO_2 dans un local

Extrait — BAC Centres étrangers, 11 juin 2018

Dans une usine, on se propose de tester un prototype de hotte aspirante pour un local industriel. Le taux de CO_2 contenu dans le local au bout de t minutes est modélisé sur $[0\ ;\ 20]$ par

$$f(t) = (0,8t + 0,2)\mathrm{e}^{-0,5t} + 0,03.$$

On donne le tableau de variation de la fonction f :

t	0		1,75		20
$f'(t)$		+	0	−	
f	0,23	↗		↘	

1. Dans cette question, on arrondira les deux résultats au millième.
   (a) Calculer $f(20)$.
   (b) Déterminer le taux maximal de CO_2 présent dans le local pendant l'expérience.
2. On souhaite que le taux de CO_2 dans le local retrouve une valeur V inférieure ou égale à $3,5\,\%$.
   (a) Justifier qu'il existe un unique instant T à partir duquel cette condition est satisfaite.
   (b) On considère l'algorithme suivant.

Adaptation Python de l'algorithme officiel.

```python
from math import exp

def seuil_co2():
    t = 1.75
    p = 0.1
    V = 0.7
    while V > 0.035:
        t += p
        V = (0.8*t + 0.2)*exp(-0.5*t) + 0.03
    return t
```

Que représente la valeur renvoyée dans le contexte de l'exercice ?

Exo 3 Repousse de la queue d'un lézard

Extrait — BAC Amérique du Sud, 12 novembre 2018

Lorsque la queue d'un lézard des murailles casse, elle repousse toute seule en une soixantaine de jours. Sa longueur est modélisée sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 10\mathrm{e}^{u(x)}, \qquad u(x) = -\mathrm{e}^{2-\frac{x}{10}}.$$

1. (a) Calculer $f(20)$. En déduire une estimation, arrondie au millimètre, de la longueur après vingt jours de repousse.
   (b) Selon cette modélisation, la queue du lézard peut-elle mesurer 11 cm ?

Exo 4 Concentration d'alcool dans le sang

Extrait — BAC Polynésie, 10 juin 2016

La concentration C d'alcool dans le sang de Paul est modélisée, en fonction du temps t exprimé en heure, par la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. À quel instant la concentration est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir au centième.
3. Déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.
4. Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.
5. Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel l'alcool n'est plus détectable, le seuil étant 5×10^{-3} g.L^{-1}.

Exo 5 Une équation avec une exponentielle

Extrait — BAC Nouvelle-Calédonie, 17 novembre 2016

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} - 0,1.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ 1]$.

Exo 6 Fonction paire et recherche de racines

Extrait — BAC Métropole–La Réunion, 21 juin 2019

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right).$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution α.
4. En remarquant que $f(-x) = f(x)$, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposées.

Exo 7 Étude d'une fonction et unicité d'une racine

Extrait — BAC Antilles-Guyane, 19 juin 2014

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}.$$

1. Soit $g(x) = 1 - x + \mathrm{e}^{x}$. Dresser le tableau de variations de g puis en déduire son signe.
2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Démontrer que $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}g(x)$.
4. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α et que $-1 < \alpha < 0$.

Exo 8 Racine d'un polynôme

Extrait — BAC Amérique du Nord, 19 mai 2022

Soit p la fonction définie sur $[-3\ ;\ 4]$ par

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1.$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur $[-3\ ;\ 4]$.

2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution α.
3. Déterminer une valeur approchée de α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de p sur $[-3\ ;\ 4]$.

Exo 9 Une équation faisant intervenir le cosinus

Extrait — BAC Centres étrangers, 8 juin 2016

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

Affirmation : l'équation $x - \cos x = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exo 10 Échauffement d'une boîte de conserve

Extrait — BAC Pondichéry, 22 avril 2016

Une boîte de conserve, initialement à 25 °C, est placée dans un four à température constante de 100 °C. Pour tout entier naturel n, sa température au bout de n minutes est modélisée par la suite (T_n) définie par $T_0 = 25$ et

$$T_{n+1} = 0,85T_n + 15.$$

1. Déterminer la température au bout de trois minutes, arrondie à l'unité.
2. Démontrer que $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3. Au bout de combien de minutes la température dépasse-t-elle 85 °C ?

Exo 11 Fonction auxiliaire, minimum et suite associée

Extrait adapté — BAC S Polynésie, juin 1997, problème, parties I et II (questions 1 à 7) et partie III adaptée

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Partie I — Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Étudier les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $g'(x)$ et déterminer son signe.
3. En déduire le tableau de variations de g.
4. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis justifier que

$$0,35 \leqslant \alpha \leqslant 0,36.$$

5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II — Étude de f

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x.
3. En déduire, à l'aide de la partie I, les variations de f et dresser son tableau de variations.
4. **a.** Démontrer que
$$f(\alpha) = \alpha\left(1 + 2\mathrm{e}^{-\alpha}\right).$$
b. À l'aide de l'encadrement de α, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ d'amplitude 4×10^{-2}.

5. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$, puis préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.
6. Donner une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
7. Tracer Δ, T et $\mathcal{C}$.

Partie III adaptée — Suite associée

On définit h sur $[1\ ;\ 2]$ par $h(x) = f(x) - x$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [1\ ;\ 2]$, $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$.
2. Étudier les variations de h, puis démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution β dans $[1\ ;\ 2]$.
3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Démontrer par récurrence que $u_n \in [1\ ;\ 2]$ pour tout n.
   b. Démontrer que (u_n) est croissante et majorée par β.
   c. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exo 12 Fonction auxiliaire et point fixe

Extrait adapté — BAC S Asie, juin 1998, problème, parties I et II

Partie I — Étude d'une fonction auxiliaire

On définit g sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2.$$

1. **a.** Montrer que $g'(x) = x(\mathrm{e}^x + 2)$.
   b. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c. Étudier le signe de g' et dresser le tableau de variations de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ +\infty[$, puis justifier que $\alpha \in [\frac{1}{2}\ ;\ 1]$.

Partie II — Étude d'une fonction et d'un point fixe

On définit f sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + x}.$$

1. Montrer que les équations $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ sont équivalentes sur $[0\ ;\ +\infty[$. En déduire que $f(x) = x$ admet une unique solution α.
2. **a.** Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.
   b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   c. Dresser le tableau de variations de f.
   d. Construire la courbe représentative de f en indiquant les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

Exo 13 Exponentielle, variations et tangentes

Extrait adapté — BAC S Métropole, septembre 1998, problème, partie B (questions 1 à 3)

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = -x\mathrm{e}^{2x+1},$$

   et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.
   a. Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
   b. Étudier le sens de variation de f.
   c. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

d. Dresser le tableau de variations de f.

e. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0, puis une équation de sa tangente T au point d'abscisse -1.

f. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x$, et sa courbe représentative Γ. Déterminer une équation de la tangente à Γ au point d'abscisse -1.

2. On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = 1 + \mathrm{e}\, x\mathrm{e}^x.$$

a. Étudier le sens de variation de h. En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

b. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Γ.

c. Tracer, dans un même repère, les courbes T, $\mathcal{C}$ et Γ.

3. Soit $m \in \mathbb{R}$ et M le point de Γ d'abscisse m.

a. Écrire une équation de la tangente D à Γ en M.

b. La tangente D coupe les axes en A et B. Calculer, en fonction de m, les coordonnées du milieu J de $[AB]$.

c. Prouver que J appartient à $\mathcal{C}$.

d. Tracer D et J pour $m = 0$.

Exo 14 Continuité, variations et solution unique

Extrait adapté — BAC C Polynésie, juin 1998, problème, parties B et C

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x + 1 + x\mathrm{e}^{-x},$$

et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. **a.** Montrer que $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ pour tout $x \geqslant 0$.

b. Calculer $f'(x)$ et utiliser le résultat précédent pour montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \geqslant 0$.

c. Calculer la limite de f en $+\infty$ et dresser son tableau de variations.

2. Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$, et préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$.
3. Déterminer les coordonnées du point de $\mathcal{C}$ où la tangente est parallèle à $\mathcal{D}$.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ +\infty[$, puis vérifier que $0 < \alpha < 1$.
5. Construire $\mathcal{D}$, le point de tangence, la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente en ce point. Donner par lecture graphique une valeur approchée de α.

Partie C adaptée — Approximation par une suite

Sur $[0\ ;\ 1]$, on définit h par

$$h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

1. Démontrer que, sur $[0\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 2$ équivaut à $h(x) = x$.
2. Calculer $h'(x)$ et démontrer que h est croissante sur $[0\ ;\ 1]$. En déduire que $h([0\ ;\ 1]) \subset [0\ ;\ 1]$.
3. On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = h(u_n)$.

a. Démontrer par récurrence que $u_n \in [0\ ;\ 1]$ pour tout n.

b. En utilisant la continuité de $x \mapsto h(x) - x$ et l'unicité de α, montrer que $h(x) > x$ pour $x \in [0\ ;\ \alpha[$. En déduire que (u_n) est croissante et majorée par α.

c. Démontrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exo 15 Existence et approximation d'une solution

Extrait adapté — BAC S Polynésie, juin 1999, problème, partie A (questions 2 et 5)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{2x-2},$$

et l'intervalle $I = [0\ ;\ 0,5]$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur I.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans I une unique solution a.
3. Déterminer une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

Exo 16 Cosinus, décroissance et équation

Extrait — BAC S Métropole, septembre 2000, problème, partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (2 + \cos x)\mathrm{e}^{1-x},$$

et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) > 0$.
2. **a.** Montrer que, pour tout réel x,
$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x.$$
b. En déduire que, pour tout réel x, $2 + \cos x + \sin x > 0$.
c. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. **a.** Montrer que, pour tout réel x,
$$\mathrm{e}^{1-x} \leqslant f(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{1-x}.$$
b. En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
c. Interpréter géométriquement la limite de f en $+\infty$.
4. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,\pi]$.
b. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. Représenter la courbe $\mathcal{C}$ sur $[0\,;\,4]$.

Exo 17 Étude d'une fonction à asymptote verticale

Extrait adapté — BAC S Asie, juin 2001, problème, partie I

On considère la fonction f définie sur $]-1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en -1. En déduire l'existence d'une asymptote verticale.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que son signe est celui de $\dfrac{x-1}{x+1}$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$, les droites d'équations $x = -1$ et $y = 1$, ainsi que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution α dans $[1\ ;\ 10]$. À l'aide de la calculatrice ou du graphique, encadrer α par deux entiers consécutifs.

Exo 18 Fonction auxiliaire, racines et asymptote

Extrait — BAC S Nouvelle-Calédonie, décembre 2001, problème, parties A et B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - (x^2 + 4x + 3)\mathrm{e}^{-x},$$

et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. On note également D la droite d'équation $y = x$.

Partie A — Étude d'une fonction auxiliaire

On considère g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x^2 + 2x - 1)\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

A.1. Étudier les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

A.2. Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ et $3 - x^2$ ont le même signe.

A.3. En déduire le tableau de variations de g.

A.4. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions réelles. Vérifier que l'une d'elles est 0 et noter α l'autre solution.

b. Prouver que $-2,4 < \alpha < -2,3$.

A.5. En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie B — Étude de la fonction f

B.1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

B.2. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

B.3. Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

B.4. **a.** Montrer que D et $\mathcal{C}$ se coupent en deux points A et B dont on donnera les coordonnées.

b. Étudier la position relative de D et de $\mathcal{C}$.

B.5. Construire la courbe $\mathcal{C}$ et la droite D.

Exo 19 Racines d'une famille de fonctions

Extrait adapté — BAC S Polynésie, juin 2002, problème, partie A (questions 1 à 5) et partie B (questions 1 à 3)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - \mathrm{e}^{-x},$$

et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

A.1. Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que peut-on en déduire pour la courbe $\mathcal{C}$?

A.2. Calculer $f'(x)$, puis en déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

A.3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

A.4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique u. Montrer que $u \in [1\,;2]$, puis déterminer un encadrement de u d'amplitude 10^{-1}.

A.5. Tracer (T) et $\mathcal{C}$ dans un même repère.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - \mathrm{e}^{-x}.$$

B.1. Calculer $f_n'(x)$ et donner son signe sur $[0\,;+\infty[$. Préciser $f_n(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$, puis dresser le tableau de variations de f_n.

B.2. **a.** Calculer $f_n(n)$ et préciser son signe.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{e}^{n+1} > 2n+1$. En déduire le signe de $f_n(n+1)$.

c. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique sur $[n\,;n+1]$. On la note u_n.

B.3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n}$.

Exo 20 Une fonction auxiliaire pour étudier une courbe

Extrait — BAC S Amérique du Sud, décembre 2002, problème, parties A et B

Partie A — Fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^x(1-x)+1.$$

1. Étudier le sens de variation de g.
2. Démontrer que $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in [1,27\ ;\ 1,28]$.
3. Déterminer le signe de g sur $]-\infty\ ;\ 0[$, puis justifier que $g(x) > 0$ sur $[0\ ;\ \alpha[$ et $g(x) < 0$ sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

Partie B — Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x+1} + 2.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (b) Démontrer que la droite d'équation $y = x+2$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.
   (c) Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette droite.
3. (a) Montrer que la dérivée de f a le même signe que la fonction g étudiée dans la partie A.
   (b) Montrer qu'il existe deux entiers p et q tels que $f(\alpha) = p\alpha + q$.
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ avec ses asymptotes et la tangente au point d'abscisse α.

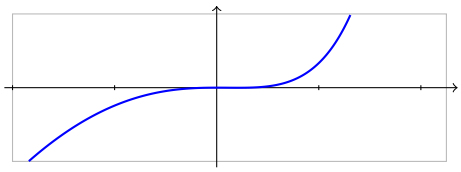
Exo 21 Étude d'une fonction et de son minimum

Extrait adapté — BAC S Pondichéry, avril 2003, problème, partie A (questions 1 à 3) et partie B (questions 1 et 2)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^{x-1} - \frac{x^2}{2},$$

et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative. Le graphique ci-dessous est une représentation de $\mathcal{C}$.



À l'observation de ce graphique, conjecturer le sens de variation de f sur $[-3\,;2]$.

Partie A — Contrôle de la conjecture

A.1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x et l'exprimer à l'aide de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-1} - 1.$$

A.2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.

- **a.** Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis vers $-\infty$.
- **b.** Calculer $g'(x)$ et étudier son signe.
- **c.** En déduire les variations de g, puis dresser son tableau de variations.
- **d.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution réelle α. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
- **e.** Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

A.3. Sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

- **a.** Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
- **b.** En déduire le sens de variation de f.
- **c.** Que pensez-vous de la conjecture ?

Partie B — Encadrement du minimum local

B.1. Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

B.2. On considère la fonction h définie sur $[0\,;\,1]$ par

$$h(x) = -\frac{x^3}{2(x+2)}.$$

- **a.** Calculer $h'(x)$ pour $x \in [0\,;\,1]$, puis déterminer le sens de variation de h sur cet intervalle.
- **b.** En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

Exo 22 Exponentielle et cosinus : étude sur un intervalle

Extrait adapté — BAC S Polynésie, juin 2003, problème, partie A, questions 1 à 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

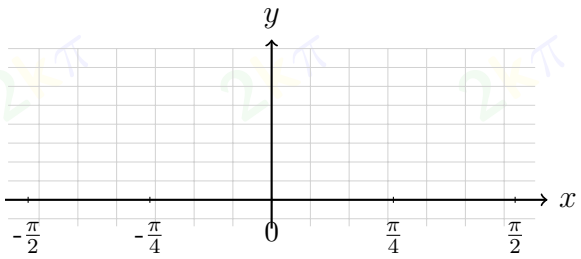
$$f(x) = \mathrm{e}^x \cos x,$$

et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Montrer que, pour tout réel x, $-\mathrm{e}^x \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{e}^x$. En déduire une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
2. Déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

4. Calculer $f'(x)$, puis établir le sens de variation de f sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{4}\right]$ et sur $\left[\dfrac{\pi}{4}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Donner les valeurs de f aux bornes de ces intervalles et en $\pi/4$.
5. Tracer $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ dans le repère ci-dessous.



6. Démontrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{2}$ admet une solution unique α sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$. En donner une valeur approchée au centième à l'aide de la calculatrice.

Exo 23 Zéros d'une fonction auxiliaire et variations

Extrait adapté — BAC S Antilles-Guyane, septembre 2003, problème, parties A et B (questions A.1 à A.5 et B.1 à B.4)

Partie A — Étude de la fonction auxiliaire

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = (2-x)\mathrm{e}^x - 1.$$

A.1. Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.

A.2. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, puis étudier le signe de sa dérivée. En déduire les variations de φ et calculer $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(1)$ et $\varphi(2)$.

A.3. Prouver que φ s'annule uniquement en deux valeurs α et β, avec $\alpha < \beta$. Étudier le signe de φ sur $\mathbb{R}$ et récapituler dans un tableau.

A.4. À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α et de β.

A.5. Montrer que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{2-\alpha}$.

Partie B — Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - x}.$$

B.1. Montrer que $\mathrm{e}^x - x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.

B.2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

B.3. Calculer $f'(x)$, puis construire le tableau des variations de f à l'aide des résultats de la partie A.

B.4. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, où α est la plus petite des deux racines de φ.

Exo 24 Nombre de solutions et suites de niveaux

Extrait adapté — BAC S La Réunion, juin 2004, exercice 1, parties A et B

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{1-x^2}.$$

Son tableau de variations est donné ci-dessous ; la droite $y = 1$ est une asymptote horizontale en $+\infty$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	1	↘	0	↗	1

Partie A — Équations de la forme $f(x) = k$

1. Pour un réel k donné, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ dans $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Pour un entier naturel non nul n, déterminer les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes.

Partie B — Deux suites définies par des équations

1. Pour $n \geqslant 2$, démontrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet deux solutions u_n et v_n, respectivement dans $[0\ ;\ 1]$ et $[1\ ;\ +\infty[$.
2. Déterminer le sens de variation des suites (u_n) et (v_n).
3. Montrer que ces deux suites convergent et déterminer leurs limites. En déduire qu'elles sont adjacentes.

Exo 25 Modèle exponentiel et variations

Extrait — BAC S Métropole, juin 2005, problème, partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3\mathrm{e}^{x/4}}{2 + \mathrm{e}^{x/4}}.$$

a. Démontrer que

$$f(x) = \frac{3}{1 + 2\mathrm{e}^{-x/4}}.$$

b. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c. Étudier les variations de f.

Exo 26 Décroissance d'une suite et encadrement par récurrence

Extrait — BAC S Pondichéry, 31 mars 2005, exercice 4

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \frac{n^{10}}{2^n}.$$

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence

$$u_{n+1} \leqslant 0,95u_n \quad \Longleftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}.$$

   a. Étudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de f.

   b. Montrer qu'il existe dans $[1\,;\,+\infty[$ un unique réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.

   c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leqslant \alpha \leqslant n_0$.

   d. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 16$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{10} \leqslant 1,9$.

3. **a.** Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

   b. Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver que, pour tout entier naturel $n \geqslant 16$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant 0,95^{n-16}u_{16}.$$

   En déduire la limite de la suite (u_n).

Exo 27 Une fonction exponentielle et une équation de niveau

Extrait — BAC S Métropole, septembre 2005, exercice 1, partie A, questions 1 à 4

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 10)\mathrm{e}^{-x/2}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α. En donner une valeur décimale approchée au millième.
4. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

Exo 28 Continuité et dérivabilité : trois affirmations

Extrait adapté — BAC S Pondichéry, 3 avril 2006, exercice 1, thème 2 (affirmations 2.a à 2.c)

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I, et soit $a \in I$. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier.

2.a. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

2.b. Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.

2.c. Si f est dérivable en a, alors la fonction

$$h \longmapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

admet une limite finie en 0.

Exo 29 Continuité en un point et tangente

Extrait — BAC S La Réunion, juin 2007, exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
   (b) Établir que, pour $x \neq 0$, $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1}\right)$, puis en déduire la limite de f en $+\infty$.
2. Donner, sans la démontrer, la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$, puis démontrer que f est continue en 0.
3. (a) Démontrer que, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$, avec égalité seulement pour $x = 0$.
   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$ et déterminer la fonction g telle que
   $$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x g(x)}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}.$$
   (c) Dresser le tableau de variations de f.
4. Soit $x \neq 0$ et soient $M(x; f(x))$ et $M'(-x; f(-x))$ deux points de $\mathcal{C}$.
   (a) Établir que $f(-x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').
   (b) On admet que f est dérivable en 0. Que suggère le résultat précédent pour la tangente en ce point ?

Exo 30 Une famille de fonctions exponentielles

Extrait adapté — BAC S Asie, 18 juin 2008, exercice 4, parties A à C, questions 1 à 3

Partie A — Limite de référence

En utilisant le résultat $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Partie B — Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Étudier les variations de f et ses limites aux bornes de son domaine. Résumer les résultats dans un tableau de variations.
2. Tracer la courbe représentative de f.

Partie C — Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k, on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_k(x) = (x+1)\mathrm{e}^{kx},$$

et $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative. On a $f_{-1} = f$.

1. (a) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?
   (b) Déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$. Vérifier que, pour tout entier k, ces points appartiennent à $\mathcal{C}_k$.
2. Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $(x+1)(\mathrm{e}^x-1)$. En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{C}_{k+1}$.
3. Calculer $f_k'(x)$ pour $k \neq 0$, puis étudier le sens de variation de f_k selon les valeurs de k.

Exo 31 Fonction auxiliaire et variations

Extrait adapté — BAC S Polynésie, juin 2009, exercice 4, partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}.$$

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et donner une interprétation graphique du résultat.
2. On considère la fonction g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

   $$g(x) = x^3 + x^2 + x - 1.$$

   Établir que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\ ;\ +\infty[$.
3. (a) Montrer que, pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de signes contraires.
   (b) En déduire les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Exo 32 Une fonction logistique et son asymptote

Extrait — BAC S Pondichéry, 17 avril 2015, exercice 1, partie A

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et Δ la droite d'équation $y = 3$.

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 2,999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

Exo 33 Une concentration à l'équilibre

Extrait — BAC S Asie, 22 juin 2017, exercice 1, partie B

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{105}{x}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x}\right).$$

On pose, pour $x \geqslant 0$,

$$g(x) = \frac{3x}{40}\mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} + \mathrm{e}^{-\frac{3}{40}x} - 1.$$

On admet que g est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, avec $g(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -1$.

1. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{105g(x)}{x^2}$.
2. En déduire le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 5,9$ admet une unique solution sur $[1\ ;\ 80]$, puis en déduire qu'elle admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$. Donner une valeur approchée au dixième.

Exo 34 Le profil d'un portail

Adapté de — BAC S Pondichéry, 26 avril 2017, exercice 1, parties A et B

Le profil symétrique d'un portail est modélisé sur $[-2\ ;\ 2]$ par la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(\mathrm{e}^{x/b} + \mathrm{e}^{-x/b}\right) + \frac{9}{4}, \qquad b > 0.$$

Le point le plus haut du portail est noté S. Pour $a \in [0\ ;\ 2]$, les extrémités du portail sont aux abscisses $-a$ et a.

Partie A

1. Montrer que, pour tout $x \in [-2\ ;\ 2]$, $f(-x) = f(x)$. Quelle propriété géométrique en déduit-on pour la courbe de f ?
2. Montrer que, pour tout $x \in [-2\ ;\ 2]$,

$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{x/b} - \mathrm{e}^{-x/b}\right).$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[-2\ ;\ 2]$ et donner les coordonnées de S en fonction de b.

Partie B

La hauteur du mur est de $1,5$ m et le sommet S doit se trouver à 2 m du sol.

1. Justifier que $b = 1$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ 2]$, puis en donner une valeur approchée au centième. Cette abscisse détermine la demi-largeur a du portail.

Exo 35 Fonction auxiliaire et fonction exponentielle

Extrait — BAC S Nouvelle-Calédonie, 28 novembre 2017, exercice 4, parties A et B

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = -2x^3 + x^2 - 1.$$

1. Étudier les variations de g et déterminer ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, avec $\alpha \in [-1\ ;\ 0]$.
3. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

1. Démontrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
2. (a) Démontrer que, pour $x > 1$, $1 < x < x^2 < x^3$.
   (b) En déduire que, pour $x > 1$, $0 < f(x) < 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$.
   (c) En utilisant la limite de référence $x^n\mathrm{e}^{-x} \to 0$ en $+\infty$, montrer que $4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} \to 0$, puis déterminer la limite de f en $+\infty$ et son interprétation graphique.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = (-2x^3 + x^2 - 1)\mathrm{e}^{-2x+1}.$$

4. À l'aide des résultats de la partie A, déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Exo 36 Recherche de racines et variations

Extrait — BAC S Nouvelle-Calédonie, 27 novembre 2018, exercice 2, parties A et B

Partie A — Fonction auxiliaire

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (x + 2)\mathrm{e}^{x-4} - 2.$$

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau de variations de g.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$ et donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

Partie B — Fonction f

On considère f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x^2\mathrm{e}^{x-4}.$$

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.
2. On admet que f est dérivable et que $f'(x) = -xg(x)$. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que le maximum de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ est $\dfrac{\alpha^3}{\alpha + 2}$.

Exo 37 Un profil d'écoulement

Extrait — BAC S Polynésie, 19 juin 2019, exercice 2, partie B, question 1

On admet que la fonction f définie sur $]0\ ;\ 1]$ par

$$f(x) = \frac{1}{20}\left(x - \frac{1}{x^4}\right)$$

est continue et strictement croissante sur cet intervalle.

1. Justifier que l'équation $f(x) = -5$ admet une unique solution α sur $]0\ ;\ 1]$.
2. Déterminer une valeur approchée de α au centième près.

Exo 38 Hauteur d'un tas de sable

Extrait — BAC S Amérique du Sud, 8 novembre 2019, exercice 2, partie B

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x/2}.$$

1. Justifier que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$f(x) = 2\left(\frac{x/2}{\mathrm{e}^{x/2}}\right) + \mathrm{e}^{-x/2},$$

   puis calculer la limite de f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0,07$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. Donner l'arrondi de α à l'unité.

Exo 39 Une proportion modélisée par une fonction

Adapté de — BAC spécialité Asie, 7 juin 2021, exercice 1, partie II

On étudie la fonction p définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$p(t) = \frac{1}{1 + 9\mathrm{e}^{-0,4t}}.$$

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$,

$$p'(t) = \frac{3,6\mathrm{e}^{-0,4t}}{(1 + 9\mathrm{e}^{-0,4t})^2}.$$

3. Démontrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ +\infty[$, puis en donner une valeur approchée au dixième à l'aide d'une calculatrice.

Exo 40 Une racine d'une fonction exponentielle

Extrait — BAC spécialité Métropole, 13 septembre 2021, sujet 2, exercice 3, partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On note Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, puis en donner une valeur approchée au centième.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exo 41 Quantité d'un médicament dans le sang

Extrait — BAC spécialité Métropole, 11 mai 2022, exercice 1, partie A

La quantité de médicament présente dans le sang d'un patient, exprimée en milligrammes, est modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ 10]$ par

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-0,5t+1},$$

où t est le temps, en heures, écoulé depuis la prise du comprimé.

1. (a) Montrer que, pour tout $t \in [0\ ;\ 10]$,

$$f'(t) = 3(-0,5t+1)\mathrm{e}^{-0,5t+1}.$$

   (b) En déduire le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ 10]$.

   (c) Au bout de combien de temps la quantité de médicament est-elle maximale ? Quelle est alors cette quantité ?

2. (a) Montrer que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ 2]$. En donner une valeur approchée au centième.

   (b) On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution β sur $[2\ ;\ 10]$, avec $\beta \approx 3,46$. Le traitement est considéré efficace lorsque la quantité est supérieure ou égale à 5 mg. Déterminer, à la minute près, sa durée d'efficacité.

Exo 42 Deux fonctions pour modéliser une trajectoire

Extrait — BAC spécialité Métropole–Antilles-Guyane, 12 mai 2022, exercice 4, partie A

On considère les fonctions f et g définies sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 0,06(-x^2+13,7x), \qquad g(x) = (-0,15x+2,2)\mathrm{e}^{0,2x} - 2,2.$$

On donne le tableau de variations complet de f :

x	0		$6,85$		$+\infty$
$f(x)$	0	↗	$f(6,85)$	↘	$-\infty$

1. (a) Justifier la limite de f en $+\infty$.

   (b) Justifier les variations de f.

   (c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2. (a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

   (b) Démontrer que, pour tout $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = (-0,03x+0,29)\mathrm{e}^{0,2x}.$$

   (c) Étudier les variations de g et dresser son tableau de variations sur $[0\ ;\ +\infty[$. Donner une valeur approchée au centième de son maximum.

   (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution non nulle et en donner une valeur approchée au centième.

Exo 43 Racine d'un polynôme

Extrait — BAC spécialité Amérique du Nord, 19 mai 2022, exercice 2, partie A

Soit p la fonction définie sur $[-3\ ;\ 4]$ par

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1.$$

1. Déterminer les variations de p sur $[-3\ ;\ 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[-3\ ;\ 4]$.
3. Déterminer une valeur approchée de α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de p sur $[-3\ ;\ 4]$.

Exo 44 Refroidissement d'une réaction chimique

Adapté de — BAC spécialité Asie, 12 juin 2025, exercice 3, partie B

La température d'une réaction chimique, en degrés Celsius, est modélisée sur $[0\ ;\ 10]$ par

$$f(t) = (60t + 40)\mathrm{e}^{-0{,}5t},$$

où t est exprimé en minutes.

1. Montrer que, pour tout $t \in [0\ ;\ 10]$,
$$f'(t) = (40 - 30t)\mathrm{e}^{-0{,}5t}.$$
2. Étudier le sens de variation de f sur $[0\ ;\ 10]$ et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que l'équation $f(t) = 40$ admet une unique solution strictement positive α sur $]0\ ;\ 10]$.
4. Donner une valeur approchée de α au dixième près et l'interpréter dans le contexte.

Exo 45 Deux affirmations sur une fonction exponentielle

Adapté de — BAC spécialité Asie, 5 septembre 2025, exercice 1, affirmations 1 et 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x, $f'(x) = (-2x + 1)\mathrm{e}^{-2x}$.
2. L'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exo 46 Concentration d'un médicament

Extrait — BAC spécialité Amérique du Sud, 13 novembre 2025, exercice 3, partie C

On admet que la concentration d'un médicament dans le sang, en grammes par litre, est modélisée sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = 5t\mathrm{e}^{-t},$$

où t est exprimé en heures.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter le résultat.
2. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. Démontrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$. Donner des valeurs approchées au centième.
4. À partir d'une concentration supérieure ou égale à 1 g/L, il existe un risque de somnolence. Quelle est la durée du risque, en heures et minutes ?

Exo 47 Arrêt d'un chariot dans une zone de freinage

Adapté de — BAC spécialité Métropole, 18 juin 2025, exercice 4, partie B

Le temps t est exprimé en secondes à partir de l'entrée du chariot dans la zone de freinage. Sa vitesse instantanée, en mètre par seconde, est modélisée pour $t \geqslant 0$ par

$$v(t) = (12 + t)\mathrm{e}^{-0,6t}.$$

1. Montrer que, pour tout $t \geqslant 0$,
$$v'(t) = (-6,2 - 0,6t)\mathrm{e}^{-0,6t}.$$
2. En utilisant l'égalité
$$v(t) = 12\mathrm{e}^{-0,6t} + \frac{1}{0,6}\,\frac{0,6t}{\mathrm{e}^{0,6t}},$$
déterminer la limite de v en $+\infty$.
3. Étudier les variations de v sur $[0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
4. Montrer que l'équation $v(t) = 1$ admet une unique solution α, puis en donner une valeur approchée au dixième.
5. Un système d'arrêt se déclenche lorsque la vitesse est inférieure ou égale à 1 m/s. Déterminer au bout de combien de temps il entre en action et justifier.

Exo 48 Glycémie après un repas

Extrait — BAC spécialité Métropole, 9 septembre 2025, exercice 4, partie B

La glycémie, en $\mathrm{g{\cdot}L^{-1}}$, d'une personne après un repas est modélisée sur $[0\ ;\ 6]$ par

$$f(t) = (t + 1)\mathrm{e}^{-0,4t},$$

où t est exprimé en heures depuis la fin du repas.

1. (a) Montrer que, pour tout $t \in [0\ ;\ 6]$,
$$f'(t) = (-0,4t + 0,6)\mathrm{e}^{-0,4t}.$$
(b) Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 6]$ et dresser son tableau de variations.
2. Une personne est en hypoglycémie lorsque sa glycémie est inférieure à $0,7$ $\mathrm{g{\cdot}L^{-1}}$.
(a) Démontrer que l'équation $f(t) = 0,7$ admet une unique solution α sur $[0\ ;\ 6]$.
(b) Au bout de combien de temps après le repas la personne devient-elle en hypoglycémie ? Exprimer ce temps à la minute près.

Exo 49 Une fonction définie à partir d'une exponentielle

Extrait — BAC spécialité Nouvelle-Calédonie, 20 novembre 2025, exercice 3, partie A

On considère la fonction f_1 définie sur $[0\ ;\ 1]$ par

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

1. Montrer que $f_1'(x)$ est strictement positive pour tout $x \in [0\ ;\ 1[$.
2. En déduire le tableau de variations de f_1 sur $[0\ ;\ 1]$.
3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0,1$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ 1]$.