Dérivation

Exercices d'entraînement

Première générale — spécialité mathématiques

Taux de variation

Exercice 1

manuel n° 56

Le tableau ci-dessous reproduit une partie du tableau de valeurs d'une fonction f affiché par une calculatrice. Calculer le taux de variation de f entre 6 et 10.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	-1	$-2{,}5$	-3	$-2{,}5$	-1	$1{,}5$	5	$9{,}5$	15	$21{,}5$	29

Exercice 2

manuel n° 57

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g : x \mapsto \dfrac{2}{x}$ et h un nombre réel non nul.

Démontrer que, pour tout réel $h \neq -2$,

$$\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = -\frac{1}{2+h}.$$

Exercice 3

manuel n° 58

Une usine fabrique des jouets. Le coût de production en milliers d'euros de x centaines de jouets est donné par

$$f(x) = -0{,}1x^2 + 2x + 8 \qquad \text{pour } x \in [0\,;10].$$

1. L'entreprise fabrique quotidiennement 700 jouets. Elle décide d'augmenter sa production et de passer à 800 jouets par jour. Quel est l'accroissement moyen du coût de production pour cette augmentation, exprimé en milliers d'euros par centaine de jouets ?

2. Elle souhaite augmenter encore sa production en gardant le même accroissement moyen qu'à la question précédente. Est-ce possible ? Si oui, quelle sera alors sa production ?

Exercice 4

manuel n° 59

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto \sqrt{x} - 1$ et a un nombre strictement positif.

1. Sachant que le taux de variation de f entre 0 et a est égal à $\dfrac{2}{3}$, déterminer a.

2. Tracer sur un même graphique la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f et la droite D de coefficient directeur $\dfrac{2}{3}$ passant par le point $A(0\,;-1)$.

Nombre dérivé – Tangente

Exercice 5

manuel n° 60

1. Qu'affiche la fonction Python ci-dessous si on lui fournit la fonction $f : x \mapsto x^2$ et le nombre $a = 3$?

```
def afficher_taux(f, a):
    for n in range(6):
        h = 10**(-n)
        t = (f(a + h) - f(a)) / h
        print(t)
```

2. À quoi correspondent les résultats précédents ?

3. Programmer cet algorithme en Python sur une calculatrice ou un ordinateur. Puis conjecturer le nombre dérivé en 2 de la fonction définie sur $[-4\,;4]$ par

$$f(x) = \sqrt{20 - x^2}.$$

Exercice 6

manuel n° 61

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 2x^2 - 5$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;I,J)$.

1. En utilisant la définition du nombre dérivé, démontrer que la fonction est dérivable en -1 et déterminer $f'(-1)$.

2. Tracer sur un même graphique la courbe $\mathcal{C}$ et sa tangente au point d'abscisse -1.

Exercice 7

manuel n° 62

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x+1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;I,J)$.

1. En utilisant la définition du nombre dérivé, démontrer que la fonction est dérivable en 0 et déterminer $f'(0)$.

2. Tracer sur un même graphique la courbe $\mathcal{C}$ et sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 8

manuel n° 63

Utiliser GeoGebra pour répondre aux questions suivantes portant sur la fonction

$$f : x \mapsto \frac{-9}{2x^2 - 4x + 3}.$$

1. Saisir l'équation de la courbe représentative de f :

$$y = \frac{-9}{2x^2 - 4x + 3}.$$

2. Placer un point sur la courbe.

3. Tracer la tangente à la courbe en ce point.

4. Afficher le coefficient directeur de la tangente.

5. En sélectionnant le point et en le plaçant à la bonne abscisse, déterminer une valeur approchée de $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.

Exercice 9

manuel n° 64

Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a le tableau de valeurs suivant.

x	-3	-1	0	2	4	5
$g(x)$	6	0	2	4	3	1
$g'(x)$	-4	0	$1{,}5$	0	-1	-3

1. Dans un repère orthonormé, placer les points de coordonnées $(x\,;g(x))$.

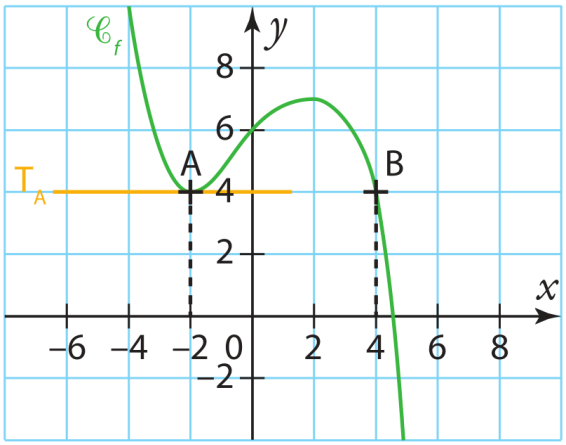
2. Construire en chacun de ces points les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_g$ représentative de la fonction g.

3. Représenter une allure possible de $\mathcal{C}_g$.

Exercice 10

manuel n° 65

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. T_A est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2. On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(4) = -4$.



1. Déterminer $f'(-2)$ et donner l'équation de la tangente T_A.

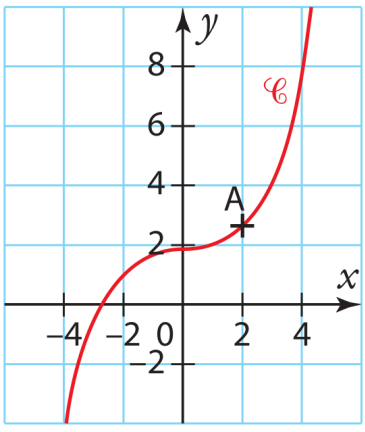
2. B est le point de la courbe d'abscisse 4. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point B.

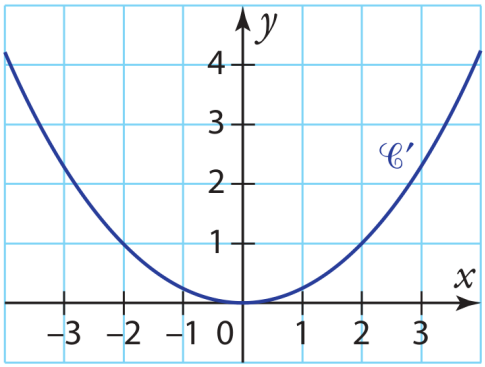
Exercice 11

manuel n° 66

On a représenté la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction f en rouge et la courbe $\mathcal{C}'$ de sa fonction dérivée f' en bleu.

Déterminer une valeur approchée du coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 2.





Exercice 12

manuel n° 67

La courbe représentative d'une fonction f admet une tangente au point d'abscisse 1.

Cette tangente a pour équation $y = -7x + 9$.

Que vaut $f'(1)$? Que vaut $f(1)$?

Exercice 13

manuel n° 68

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Donner les coefficients directeurs des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses -1, 0 et 1.

3. Compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il génère la liste des coefficients directeurs des tangentes à la courbe de f aux points dont l'abscisse x varie entre a et b avec un pas p. On suppose $a \leqslant b$ et $p > 0$.

```
a = float(input("a = ?"))
b = float(input("b = ?"))
p = float(input("p = ?"))
x = ...
L = []
while x <= ...:
    L.append(...)
    x = x + ...
```

Fonction dérivée

Exercice 14

manuel n° 69

Chacune des fonctions suivantes est de la forme $k \times u$ où k est un réel et u une fonction usuelle. Déterminer pour chacune d'elles le réel k et la fonction u, en déduire sur quel ensemble elle est dérivable, puis calculer sa fonction dérivée.

$$f : x \mapsto \frac{x}{9} \quad g : x \mapsto \frac{3x^2}{8} \quad h : x \mapsto \frac{-x^4}{44}$$

$$i : x \mapsto \frac{9}{x^2} \quad l : x \mapsto -\frac{11}{3x} \quad j : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{5}$$

Exercice 15

manuel n° 70

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \dfrac{3x^4}{8} - \dfrac{5x^3}{3} + 2x - \dfrac{11}{2}$.

b) $g(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{6}$.

c) $h(x) = \dfrac{x - 3}{2}$.

Exercice 16

manuel n° 71

Déterminer pour chacune des fonctions suivantes l'ensemble I sur lequel elle est dérivable, puis sa fonction dérivée sur I.

a) $f(x) = \dfrac{5}{2x} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{7x^2}{4}$.

b) $g(x) = \dfrac{-4}{5x}(x - 11)$.

c) $h(x) = \dfrac{5x^2 - 8x + 1}{21 - 7x}$.

d) $j(x) = \dfrac{-5}{3x^2 + 2}$.

e) $k(x) = \dfrac{9x}{x^2 - 6x + 5}$.

f) $m(x) = \sqrt{10 - x}$.

Exercice 17

manuel n° 72

Soit $f : x \mapsto |x|$ la fonction valeur absolue, définie sur $\mathbb{R}$. Soit h un nombre réel non nul.

1. Si h est strictement positif, montrer que le taux de variation de f entre 0 et $0 + h$ est égal à 1.

2. Si h est strictement négatif, montrer que le taux de variation de f entre 0 et $0 + h$ est égal à -1. (Rappel : si x est un nombre négatif alors $|x| = -x$.)

3. La fonction valeur absolue est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

Exercice 18

manuel n° 73

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3(5 - 7x)^2$. Déterminer l'expression de $f'(x)$ de deux façons différentes :

a) en remarquant que f est de la forme d'un produit de fonctions $u \times v$;

b) en développant et en réduisant f, puis en utilisant la dérivée d'une somme.

Exercice 19

manuel n° 74

On appelle « dérivée seconde » et on note f'' la fonction dérivée de la fonction f' qui est elle-même la fonction dérivée de la fonction f.

Calculer la dérivée seconde des fonctions suivantes.

a) $f : x \mapsto 2x^3 - 7x^2 + 15x - 50$.

b) $f : x \mapsto \dfrac{3x - 4}{-5x + 7}$.

Exercice 20

manuel n° 75

Soit $f : x \mapsto -\dfrac{|x|}{3}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$.

2. Déterminer sa fonction dérivée f' sur $]-\infty\,;0[$.

3. Mêmes questions sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 21

manuel n° 76

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax^2 + bx + c$, dont la fonction dérivée f' est définie pour tout réel x par $f'(x) = 6x + 7$.

1. Déterminer une expression possible de $f(x)$ et en déduire les réels a et b.

2. Sachant que la courbe représentative de f passe par le point de coordonnées $(1\,;6)$, en déduire le réel c.

Exercice 22

manuel n° 77

(D'après Bac) Une entreprise produit chaque jour entre 1 tonne et 20 tonnes de peinture. Le coût de production de x tonnes de peinture, en milliers d'euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[1\,;20]$ par

$$C(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}1x + 2{,}45.$$

En 2018, elle a produit quotidiennement 10 tonnes de peinture.

En économie, le coût marginal C_m représente l'augmentation du coût engendrée par la production d'une tonne supplémentaire. Ainsi, pour x tonnes produites avec $x \in [1\,;19]$, on a

$$C_m(x) = C(x+1) - C(x).$$

1. Calculer le coût marginal $C_m(10)$ pour une production de 10 tonnes, puis $C_m(11)$.

2. Les économistes considèrent que $C'(x)$ est une bonne approximation du coût marginal.

a) Justifier que la fonction C est dérivable sur $[1\,;20]$ et déterminer la fonction dérivée C'.

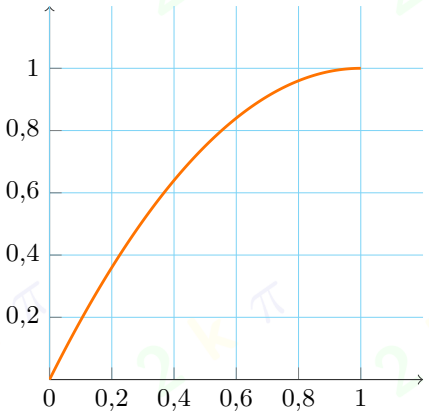
b) En déduire $C'(10)$ et $C'(11)$.

c) Comparer aux résultats de la question 1.

Exercice 23

manuel n° 78

(D'après Bac) La courbe ci-dessous donne la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) d'une personne pendant l'heure qui suit l'ingestion d'un verre d'alcool. Cette courbe correspond à la fonction C définie sur $[0\,;1]$ par $C(t) = -t^2 + 2t$.



La concentration $C(t)$ s'exprime en grammes par litre, et le temps t, en heures. À un instant t donné, $C'(t)$ représente la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang.

1. Quelle est la concentration d'alcool dans le sang au bout d'une demi-heure ?

2. **a)** Justifier que la fonction C est dérivable sur $[0\,;1]$ et déterminer la fonction dérivée C'.

b) En déduire la vitesse d'apparition d'alcool à l'instant $t = 0{,}5$, c'est-à-dire une demi-heure après l'ingestion d'alcool, puis à l'instant $t = 1$, c'est-à-dire une heure après.

c) À quel instant cette vitesse semble-t-elle maximale ? Justifier la réponse.

Équations de tangente

Pour les exercices 24 à 27, déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, puis tracer $\mathcal{C}_f$ et T.

Exercice 24

manuel n° 79

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{3}{4}x^2$ et T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a = -2$.

Exercice 25

manuel n° 80

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -\dfrac{x^3}{8}$ et T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a = 2$.

Exercice 26

manuel n° 81

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{8}{x}$ et T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a = -8$.

Exercice 27

manuel n° 82

$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f : x \mapsto -\sqrt{x}$ et T est la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a = 2$.

Exercice 28

manuel n° 83

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Le point $A(3\,;-1)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}$.

Sachant que la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point A passe par le point $J(0\,;1)$, déterminer $f'(3)$, puis l'équation de T.

Exercice 29

manuel n° 84

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -\dfrac{1}{3}x^2$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = 2x + 3$ est tangente à $\mathcal{C}$ en un point A d'abscisse a.

1. Déterminer la valeur possible de a en traçant la droite Δ et la courbe $\mathcal{C}$ sur l'écran d'une calculatrice.

2. Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 30

manuel n° 85

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 1$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Démontrer que $\mathcal{C}_f$ admet deux tangentes de coefficient directeur -1 en deux points distincts A et B dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 31

manuel n° 86

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 + 5x - 4$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Soit a un nombre réel.

1. Démontrer que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est

$$y = (2a + 5)x - a^2 - 4.$$

2. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet deux tangentes passant par le point de coordonnées $(1\,;-7)$ et donner l'équation de ces deux tangentes.

Approximation affine

Exercice 32

manuel n° 87

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit a un nombre appartenant à I et h un nombre non nul tel que $a+h \in I$.

1. Si h est très proche de 0 alors, d'après la définition du nombre dérivé, on peut dire que le taux de variation entre a et $a+h$ est très proche de $f'(a)$. En déduire que, si h est très proche de 0, on peut écrire :

$$f(a+h) \approx f'(a) \times h + f(a).$$

2. On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Justifier que si h est proche de 0, alors on peut écrire

$$(1+h)^2 \approx 1 + 2h.$$

b) En déduire sans calculatrice une valeur approchée de $1{,}005^2$ et de $0{,}999^2$.

c) Comparer avec les valeurs exactes de $f(1{,}005)$ et $f(0{,}999)$.

3. On considère la fonction racine carrée $g : x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

a) Justifier que si h est proche de 0, alors on peut écrire

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}.$$

b) En déduire sans calculatrice une valeur approchée de $\sqrt{1{,}002}$ et de $\sqrt{0{,}994}$.

c) Comparer avec les valeurs exactes de $g(1{,}002)$ et $g(0{,}994)$.

4. On considère la fonction $i : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

a) Justifier que si h est proche de 0, alors on peut écrire

$$\frac{1}{1+h} \approx 1 - h.$$

b) En déduire sans calculatrice une valeur approchée de $\dfrac{1}{0{,}991}$ et de $\dfrac{1}{1{,}007}$.

c) Comparer avec les valeurs exactes de $i(0{,}991)$ et $i(1{,}007)$.

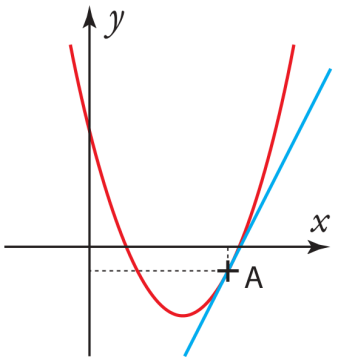
Nombre dérivé et paramètres

Exercice 33

manuel n° 88

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+5$ où a et b sont des réels et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

On sait que $\mathcal{C}_f$ passe par le point $A(6\,;\,-1)$ et que sa tangente en A a pour coefficient directeur 2.



1. Montrer que les réels a et b sont solutions du système

$$\begin{cases} 6a + b = -1, \\ 12a + b = 2. \end{cases}$$

2. Déterminer l'expression de la fonction $f(x)$.

Exercice 34

manuel n° 89

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = mx^3 - 2x^2 + x - 5$ où m est un nombre réel et $\mathcal{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. On suppose que $m = 1$.
Montrer que, dans ce cas, la courbe $\mathcal{C}_g$ admet exactement deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses, en deux points dont on déterminera les abscisses.

2. Pour quelles valeurs de m la courbe $\mathcal{C}_g$ admet-elle une unique tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

Exercice 35

manuel n° 90

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f : x \mapsto \dfrac{k}{x}$ où k est un réel fixé et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\,I, J)$. Soit d la droite d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x + 3$.

L'objectif est de trouver s'il existe un réel k tel que d soit tangente à $\mathcal{C}_f$.

1. Conjecturer l'existence d'une ou plusieurs valeurs de k à l'aide de GeoGebra, en créant un curseur pour faire varier le nombre k.

2. Démontrer l'existence d'une ou plusieurs valeurs de k et donner la (ou les) valeur(s) exacte(s) de k.

Travailler autrement

Exercice 36

manuel n° 91

1. Le célèbre mathématicien et philosophe Isaac Newton définissait la notion de « fluxion », qui correspond à la notion de nombre dérivé, par cette phrase : « La fluxion est le quotient ultime de deux accroissements évanescents. » Expliquer ce qu'il veut dire et en quoi cela peut convenir à la définition du nombre dérivé. Chercher d'autres définitions du nombre dérivé données par d'autres mathématiciens.

2. Chercher la définition de ce que Blaise Pascal appelait une « touchante ». Quel terme actuel emploie-t-on pour la désigner ? Quels autres grands mathématiciens ont travaillé sur ce sujet ?

3. Présenter les réponses à la classe.

Exercice 37

manuel n° 92

Pour tracer avec précision la tangente à la parabole de la fonction carré en un point A distinct de l'origine O, il suffit de placer sur l'axe des ordonnées le point H de même ordonnée que A puis, à l'aide d'un compas, placer le point K symétrique du point H par rapport à l'origine O du repère. La droite (KA) est très précisément la tangente à la parabole en A.

Tracer la parabole dans un repère et vérifier cette méthode pour un point placé au hasard sur la courbe, distinct de O.

Démontrer que cette méthode fonctionne bien pour tout point de la parabole distinct de O. Déterminer séparément la tangente à la parabole à l'origine O.

Réaliser ce tour de magie devant la classe.

Exercice 38

manuel n° 93

1. Trouver quatre fonctions différentes f, g, h et k (une fonction affine, deux fonctions de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec a positif pour l'une et a négatif pour l'autre, et une fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{\lambda}{x}$ où λ est une constante) telles que

$$f'(3) = g'(3) = h'(3) = k'(3)$$

et

$$f(3) = g(3) = h(3) = k(3).$$

Quelle caractéristique commune les courbes représentatives de ces quatre fonctions possèdent-elles ?

2. Créer et rédiger clairement un exercice dont l'objectif sera de prouver la caractéristique commune de ces quatre fonctions. Le donner à un autre groupe pour qu'il le résolve.

Exercices issus de SESAMATH (sesamath.net), licence libre CC BY-SA.
Recomposition, corrections ponctuelles et adaptation Python : Faire Les 2kπ.