PGCD, théorèmes de Bézout et de Gauss

Exercices vers le supérieur

Terminale — Mathématiques expertes

Exercice 1 PPCM

n° 119 · p. 128

Soient a et b deux entiers relatifs non nuls. On appelle PPCM(a, b) le plus petit multiple strictement positif de a et de b.

1. Calculer PPCM$(18, 12)$ et PPCM$(24, 40)$.
2. Calculer $\dfrac{7}{6} + \dfrac{11}{15}$. Que représente PPCM$(6, 15)$?

Exercice 2 PGCD et PPCM

n° 120 · p. 128

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On pose $D = \text{PGCD}(a, b)$ et $M = \text{PPCM}(a, b)$.

1. Montrer que, si $a = Da'$ et $b = Db'$ avec $a', b' \in \mathbb{N}^*$, alors
$$M = Da'b' \qquad \text{et} \qquad \text{PGCD}(a', b') = 1.$$
2. En déduire que $DM = ab$.

Exercice 3 Encore un PPCM

n° 121 · p. 128

Soient a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a < b$. Déterminer a et b tels que
$$\text{PGCD}(a, b) = 6 \qquad \text{et} \qquad \text{PPCM}(a, b) = 102.$$

Exercice 4 Vrai-Faux

n° 122 · p. 128

Soit l'équation $(E) : x^2 - 52x + 480 = 0$, où x est un entier naturel. La phrase suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

« Il existe deux entiers naturels non nuls dont le PGCD et le PPCM sont solutions de l'équation (E). »

Exercice 5 Propriété du PGCD

n° 123 · p. 128

Soit un entier naturel n non nul. On pose $a = 5n^2 + 7$ et $b = n^2 + 2$.

1. Montrer que PGCD(a, b) vaut 1 ou 3.
2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $\text{PGCD}(a, b) = 3$.

Exercice 6 Recherche du PGCD

n° 124 · p. 128

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres
$$a = n^3 - n^2 - 12n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Démontrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n - 4)$.
2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note $d = \text{PGCD}(\alpha, \beta)$.
   a) Trouver une relation entre α et β indépendante de n.
   b) Démontrer que d est un diviseur de 5.
   c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n - 2)$ est multiple de 5.
3. Démontrer que $(2n + 1)$ et n sont premiers entre eux.
4. a) Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD(a, b).
   b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Exercice 7 Algorithme d'Euclide

n° 125 · p. 128

À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer :

a) $\mathrm{PGCD}(99\,099, 43\,928)$ **b)** $\mathrm{PGCD}(153\,527, 245\,479)$.

Exercice 8 Calcul de PGCD

n° 126 · p. 128

Soit $n \in \mathbb{Z}$. On pose $a = n^3 + 3n^2 - 5$ et $b = n + 2$. Calculer $\mathrm{PGCD}(a, b)$.

Exercice 9 Suite et PGCD

n° 127 · p. 128

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
2. **a)** En déduire que pour tout entier naturel n, u_n est un entier naturel et que $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
   b) En déduire que deux termes consécutifs de la suite (u_n) sont premiers entre eux.

Exercice 10 PGCD

n° 128 · p. 128

Soient a et b deux entiers premiers entre eux tels que $a \geqslant b \geqslant 1$.

1. Montrer que $\mathrm{PGCD}(a + b, a - b)$ vaut 1 ou 2.
2. Montrer que $\mathrm{PGCD}(a + b, ab) = 1$.
3. Montrer que $\mathrm{PGCD}(a + b, a^2 + b^2)$ vaut 1 ou 2.

Exercice 11 PGCD et congruence

n° 129 · p. 128

Soient les entiers relatifs n vérifiant le système (S) suivant :

$$(S) : \begin{cases} n \equiv 1 \pmod 5 \\ n \equiv 5 \pmod 7. \end{cases}$$

1. **a)** Montrer que si n vérifie (S) alors n vérifie le système :

$$\begin{cases} 4n + 1 \equiv 0 \pmod 5 \\ 4n + 1 \equiv 0 \pmod 7. \end{cases}$$

   b) En déduire alors que $4n \equiv -1 \pmod{35}$.
2. Déterminer les solutions de (S).

Exercice 12 Racines rationnelles

n° 130 · p. 128

Soit le polynôme f défini par $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 13x + 10$.

1. Montrer que si f admet une racine rationnelle alors cette racine est entière.
2. **a)** Montrer que si f admet une racine entière α alors α est un diviseur de 10.
   b) Quelles sont les racines entières éventuelles de f ?
3. **a)** Après avoir déterminé ces racines, factoriser $f(x)$.
   b) Déterminer les autres racines de f.

Exercice 13 Solutions entières
n° 131 · p. 128

Soit l'équation $(E) : 2x + 5y = s$, avec $s \in \mathbb{N}$. On veut montrer que si $s \geqslant 4$, l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{N}^2$.

1. Soit $0 \leqslant s \leqslant 4$, déterminer les valeurs de s pour lesquelles (E) admet des solutions dans $\mathbb{N}^2$.
2. Montrer par récurrence que si $s \geqslant 4$, l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{N}^2$.

Exercice 14 Égalité de deux PGCD (1)
n° 132 · p. 128

Soient $n, a, b \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que si a et n sont premiers entre eux alors :

$$\text{PGCD}(ab, n) = \text{PGCD}(b, n).$$

Exercice 15 Égalité de deux PGCD (2)
n° 133 · p. 129

Soit $n \in \mathbb{Z}$, on pose $a = n^4 + 3n^2 - n + 2$ et $b = n^2 + n + 1$. Montrer que :

$$\text{PGCD}(a, b) = \text{PGCD}(n - 2, 7).$$

Exercice 16 Équation diophantienne
n° 134 · p. 129

Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;\,y)$ d'entiers relatifs tels que :

$$955x + 183y = 1.$$

On pourra remonter l'algorithme d'Euclide pour trouver une solution particulière.

Exercice 17 Somme et PPCM
n° 135 · p. 129

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On pose $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $m = \text{PPCM}(a, b)$. On rappelle que $m = da'b'$ avec $a = da'$ et $b = db'$, où a' et b' sont des entiers naturels premiers entre eux.

1. On cherche les couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels non nuls tels que $a + b = 56$ et $m = 180$.
   a) Montrer que les valeurs possibles pour d sont 1, 2 ou 4.
   b) Analyser chaque cas puis déterminer les couples $(a\,;\,b)$ qui conviennent.
2. En procédant comme à la question 1, déterminer les couples $(a\,;\,b)$ d'entiers naturels non nuls tels que $a + b = 276$ et $m = 1\,440$.

Exercice 18 Système PGCD-PPCM
n° 136 · p. 129

Déterminer les couples $(a\,;\,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a, b) = 42 \\ \text{PPCM}(a, b) = 1\,680. \end{cases}$$

Exercice 19 PGCD et suite de Fibonacci

n° 137 · p. 129

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5 et u_6.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n.$$

En déduire que les termes u_n et u_{n+1} sont premiers entre eux.

3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout entier $p \geqslant 1$,

$$u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1}u_p.$$

4. a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{PGCD}(u_{n+p}, u_n) = \mathrm{PGCD}(u_p, u_n).$$

b) En déduire que, si $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et r est le reste de la division euclidienne de m par n, alors

$$\mathrm{PGCD}(u_m, u_n) = \mathrm{PGCD}(u_r, u_n), \qquad \mathrm{PGCD}(u_m, u_n) = u_{\mathrm{PGCD}(m,n)}. \tag{1}$$

5. Application : calculer u_{12} et u_{18}. Vérifier alors la relation (1) de la question 4.b).

Exercice 20 Repas gastronomique

n° 138 · p. 129

28 personnes participent à un repas gastronomique. Le prix normal est de 26 €, sauf pour les étudiants et les enfants qui paient respectivement 17 € et 13 €. La somme totale recueillie est de 613 €.
Calculer le nombre d'étudiants et d'enfants ayant participé au repas. Proposer deux méthodes pour résoudre ce problème.

Exercice 21 Cryptage

n° 139 · p. 129

Pour transmettre un message, on utilise le système suivant.
1re étape. À chaque lettre du message en clair, on associe son numéro d'ordre dans l'alphabet :

$$\mathrm{A} \to 01\,; \quad \mathrm{B} \to 02\,; \quad \mathrm{C} \to 03\,; \quad \ldots\,; \quad \mathrm{Y} \to 25\,; \quad \mathrm{Z} \to 26.$$

On obtient ainsi une suite de nombres.
2e étape. On considère la suite d'entiers naturels $(x_n)_{n\geqslant 1}$ définie par :

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} \equiv 5x_n + 2 \pmod{33}, \qquad 0 \leqslant x_{n+1} < 33.$$

3e étape. On ajoute terme à terme les suites obtenues dans la première et la deuxième étape : on a alors le message crypté.

1. Déterminer les 25 premiers termes de la suite (x_n).
2. Coder le message suivant : `DEBARQUEMENTLEHUITJUIN`.
3. Décoder le message suivant :
   5, 12, 24, 37, 34, 21, 10, 19, 27, 34, 19, 8, 26, 27, 16, 23, 22, 25, 41.

Exercice 22 Théorème des restes chinois

n° 140 · p. 129

Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur.
Ils projettent de se les partager également et de donner le reste au cuisinier. Celui-ci recevrait alors 3 pièces.
Mais les pirates se querellent et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier 4 pièces.
Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier.
Quelle serait la fortune minimale du cuisinier s'il récupérait la totalité du trésor ?

Exercice(s) issu(s) de SESAMATH (https://www.sesamath.net), licence libre CC BY-SA. Recomposés et rectifiés.